



**HAL**  
open science

## Ondes, interactions et information

Arnaud Coatanhay

► **To cite this version:**

Arnaud Coatanhay. Ondes, interactions et information : Contributions dans une approche modélisation. Mathématiques [math]. UBO - Université de Brest, 2022. tel-04454791

**HAL Id: tel-04454791**

**<https://ensta-bretagne.hal.science/tel-04454791>**

Submitted on 13 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES DE

L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*

Par

**Arnaud COATANHAY**

**Ondes, interactions et information**

Contributions dans une approche modélisation

HDR présentée et soutenue à l'ENSTA Bretagne, le mercredi 22 juin 2022  
Unité de recherche : Lab-STICC, UMR CNRS 6285

## Rapporteurs avant soutenance :

Ghaïs EL ZEIN	Professeur des Universités, INSA Rennes, Laboratoire IETR UMR CNRS 6161
Marc HELIER	Professeur des Universités, Sorbonne Université, Laboratoire GeePs UMR CNRS 8507
Rodolphe VAUZELLE	Professeur des Universités, Université de Poitiers, Laboratoire XLIM UMR CNRS 7252

## Composition du Jury :

Président :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice ( <i>à préciser après la soutenance</i> )
Examineurs :	Mohamed BENBOUZID	Professeurs des Universités, UBO, Laboratoire IRDL UMR CNRS 6027
	Christian PERSON	Professeur IMT Atlantique, Lab-STICC UMR CNRS 6285
	Philippe POULIGUEN	HDR, Responsable du DS Ondes Acoustiques et Radioélectriques, AID DGA
Dir. de recherche :	Ali KHENCHAF	Professeur des Universités, ENSTA Bretagne, Lab-STICC UMR CNRS 6285



# Table des matières

Liste des acronymes . . . . .	iv
<b>Partie I : Présentation et projet de recherche</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1 : Présentation générale</b>	<b>3</b>
1.1 État civil . . . . .	4
1.2 Curriculum Vitae . . . . .	4
1.2.1 Formation et titres universitaires principaux . . . . .	4
1.2.2 Formation et titres universitaires complémentaires . . . . .	5
1.2.3 Autre . . . . .	5
1.2.4 Expériences professionnelles . . . . .	5
1.2.5 Activités administratives et collectives . . . . .	5
1.3 Liste des publications et communications . . . . .	9
1.4 Activités d'enseignement . . . . .	16
1.4.1 Enseignement à l'ENSTA Bretagne depuis 2001 . . . . .	16
1.4.2 En tant que vacataire à l'université du Havre 1996-1997 . . . . .	17
1.4.3 Principaux documents pédagogiques . . . . .	17
1.4.4 Volume horaire récapitulatif en enseignement . . . . .	19
1.5 Activités de recherche . . . . .	20
1.5.1 Travaux de recherche de doctorat (1994-1997) . . . . .	20
1.5.2 Travaux de recherche à FORENAP (1998-2001) . . . . .	21
1.5.3 Travaux de recherche à l'ENSTA Bretagne (depuis juin 2001) . . . . .	22
1.6 Activités d'encadrement . . . . .	27
<b>Chapitre 2 : Projet de recherche</b>	<b>29</b>
2.1 Motivations et projet de recherche à 4 ans . . . . .	30
<b>Introduction générale</b>	<b>35</b>
<b>Partie II : Synthèse d'une sélection de travaux</b>	<b>35</b>
<b>Chapitre 3 : Ondes cylindriques et interface</b>	<b>37</b>
3.1 Une expérience de physique bien connue . . . . .	38
3.2 Passage à la diffusion par un cylindre . . . . .	40
3.2.1 Matrice de transition . . . . .	40

3.2.2	Exemple du tube élastique . . . . .	42
3.2.3	Application numérique . . . . .	46
3.3	Méthode des images et diffusion par un cylindre . . . . .	48
3.4	Un problème ouvert . . . . .	49
3.5	La méthode des images généralisée . . . . .	49
3.5.1	Contribution élémentaire de l'interface plane . . . . .	50
3.5.2	Diffusion par le cylindre d'une onde cylindrique venant du point symétrique . . . . .	52
3.5.3	Interactions mutuelles . . . . .	53
3.6	Utilisation des séries divergentes . . . . .	55
3.6.1	Redéfinition des sommes partielles . . . . .	55
3.6.2	Méthodes plus heuristiques . . . . .	58
3.6.3	Que penser des séries divergentes ? . . . . .	58
3.7	Retour à la physique . . . . .	59
3.8	Troncature . . . . .	61
3.8.1	Analyse du problème de divergence . . . . .	61
3.8.2	Détermination de l'ordre de troncature . . . . .	63
3.9	Validation par la théorie de rayon . . . . .	68
3.9.1	Modèle harmonique . . . . .	69
3.9.2	Modèle temporel . . . . .	70
3.10	Simulation numérique . . . . .	72
3.11	Quelques compléments . . . . .	74
3.12	Conclusion . . . . .	74
<b>Chapitre 4 : Ondes et activités cérébrales</b>		<b>77</b>
4.1	Au commencement était le cerveau . . . . .	77
4.2	Trois dispositifs biomédicaux . . . . .	80
4.2.1	Imagerie par résonance magnétique (IRM) . . . . .	80
4.2.2	Électroencéphalographie . . . . .	83
4.2.3	Magnétoencéphalographie . . . . .	86
4.3	Mes recherches . . . . .	90
4.3.1	Traitement du signal . . . . .	90
4.3.2	Approche modélisation . . . . .	94
4.3.3	Quelques compléments . . . . .	101
4.4	Conclusion . . . . .	105
<b>Chapitre 5 : Ondes, rugosités et reliefs</b>		<b>111</b>
5.1	Égarements et découvertes . . . . .	112
5.2	Diffusion électromagnétique par une surface rugueuse . . . . .	114
5.2.1	Description d'une surface rugueuse . . . . .	114
5.2.2	Existence et unicité du problème physique . . . . .	117
5.2.3	Modélisations asymptotiques . . . . .	117
5.2.4	Application à la diffusion électromagnétique par des surfaces de mer . . . . .	125
5.2.5	Mes activités de recherche dans le domaine de la diffusion par des surfaces de mer vues comme des surfaces rugueuses . . . . .	130
5.3	De la surface rugueuse au fort relief . . . . .	141
5.3.1	Modèles élémentaires . . . . .	142

5.3.2	Modèle de Vogler . . . . .	143
5.3.3	Accélération de l'algorithme, première voie . . . . .	146
5.3.4	Accélération de l'algorithme, voie plus radicale . . . . .	147
5.3.5	Pour aller plus loin . . . . .	147
5.4	Conclusion . . . . .	151
<b>Chapitre 6 : Ondes et surfaces de mer (mouvements déterministes)</b>		<b>159</b>
6.1	<i>E pur si muove!</i> . . . . .	160
6.2	Une thématique académique intéressante? . . . . .	160
6.3	Une application opérationnelle : les systèmes GNSS . . . . .	165
6.4	Modélisation électromagnétique par des approches numériques . . . . .	166
6.4.1	Méthode des moments classique . . . . .	166
6.4.2	Méthode des moments d'ordre supérieur . . . . .	168
6.4.3	Méthode des moments adaptative multi-échelle . . . . .	171
6.5	Les vagues déferlantes . . . . .	174
6.5.1	Génération des profils de vagues déferlantes . . . . .	174
6.5.2	Simulation des champs électromagnétiques diffusés par les vagues . . . . .	178
6.5.3	Pour aller plus loin . . . . .	180
6.6	Conclusion . . . . .	180
<b>Chapitre 7 : Ondes et surfaces de mer : approche stochastique</b>		<b>185</b>
7.1	Quelques grains de pollen . . . . .	185
7.2	Surface de mer un ensemble de grains de pollen? . . . . .	186
7.2.1	Somme de diffuseurs aléatoires . . . . .	186
7.2.2	Diffuseurs en mouvement (Modèle de Field) . . . . .	187
7.3	Travaux de recherche . . . . .	189
7.3.1	Inférence du clutter de mer . . . . .	189
7.3.2	Identification des paramètres du modèle . . . . .	192
7.3.3	Modèle de Field et présence d'une cible . . . . .	193
7.4	Non-observabilité de $x_t$ . . . . .	194
7.5	Pour aller plus loin . . . . .	196
7.6	Conclusion . . . . .	197
<b>Chapitre 8 : Ondes, entropie et quantique</b>		<b>199</b>
8.1	Paradoxe . . . . .	199
8.2	Onde et information . . . . .	200
8.2.1	Information et entropie . . . . .	200
8.2.2	Application en guerre électronique . . . . .	203
8.3	Information et mécanique quantique . . . . .	206
8.3.1	Quelques notions . . . . .	207
8.3.2	Radar quantique . . . . .	212
8.3.3	Pour aller plus loin . . . . .	215
8.4	Conclusion . . . . .	216
<b>Conclusion générale</b>		<b>221</b>

## Liste des acronymes principaux

<b>AMMM</b>	Adaptive Multiscale Moment Method
<b>ANFR</b>	Agence Nationale de Fréquences
<b>ASK</b>	Amplitude Shift Keying
<b>CEA</b>	Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
<b>CNR</b>	Carrier to Noise Ratio
<b>CW</b>	Carrier Wave
<b>DGA</b>	Direction Générale de l'Armement
<b>DNN</b>	Deep Neural Network
<b>DPSM</b>	Distributed Point Source Method
<b>EDO</b>	Équation Différentielle Ordinaire
<b>EDP</b>	Équation aux Dérivées Partielles
<b>EDS</b>	Équation Différentielle Stochastique
<b>EEG</b>	Électro-EncéphaloGraphie
<b>EICE</b>	Équation Intégrale du Champ Électrique
<b>EICM</b>	Équation Intégrale du Champ Magnétique
<b>FORENAP</b>	FORmation pour la REcherche en Neurosciences Appliquées
<b>GNSS</b>	Géolocalisation et Navigation par un Système de Satellites
<b>GPR</b>	Ground Penetrating Radar
<b>GPS</b>	Global Positioning System
<b>IFSTTAR</b>	Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux
<b>IRM</b>	Imagerie par Résonance Magnétique
<b>ITU</b>	International Telecommunication Union
<b>KA</b>	Kirchhoff Approximation
<b>KA-GO</b>	Kirchhoff Approximation - Geometric Optics
<b>Lab-STICC</b>	Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Information, de la Communication et de la Connaissance
<b>LAUE</b>	Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électronique
<b>LCPC</b>	Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
<b>LINASAFAF</b>	Liaison et INteractions Air-Sol pour des Aéronefs en Altitude Faible
<b>LORETA</b>	Low Resolution Electromagnetic Tomography
<b>LRBA</b>	Laboratoire de Recherche en Aérodynamique et Balistique
<b>MBKE</b>	Multiple Bridged Knife-Edge
<b>MdM</b>	Méthode des Moments
<b>MEG</b>	Magnéto-EncéphaloGraphie

---

<b>MKE</b>	Multiple Knife-Edge
<b>MNE</b>	Minimum Norm Estimation
<b>MoM</b>	Method of Moments
<b>MOPS</b>	Marine Opportunity Passive Systems
<b>MUSIC</b>	MULTiple SIGNAL Classification
<b>NASA</b>	National Aeronautics and Space Administration
<b>NRCS</b>	Normalized Radar Cross-Section
<b>OMS</b>	Organisation Mondiale de la Santé
<b>ONR</b>	Office of Naval Research
<b>PA</b>	Potentiel d'Action
<b>PIM</b>	Propagation et Interaction Multi-échelle
<b>POEMS</b>	Propagation des Ondes : Étude Mathématique et Simulation
<b>PPM</b>	Phase-Perturbation Method
<b>PPS</b>	Potentiel Post-Synaptique
<b>PFE</b>	Projet de Fin d'Étude
<b>PWVD</b>	Pseudo-Wigner-Ville Distribution
<b>PSK</b>	Phase Shift Keying
<b>QAM</b>	Quadrature Amplitude Modulation
<b>QIR</b>	Quantum Illumination Radar
<b>RAP-MUSIC</b>	Recursively Applied and Projected MULTiple SIGNAL Classification
<b>RCS</b>	Radar Cross-Section
<b>RPS</b>	Radar à Pénétration de Sol
<b>ROC</b>	Receiver Operating Characteristic
<b>ROS</b>	Radar à Ouverture Synthétique
<b>SAR</b>	Synthetic Aperture Radar
<b>SERN</b>	Surface Équivalente Radar Normalisée
<b>SER</b>	Surface Équivalente Radar
<b>SNN</b>	Shallow Neural Network
<b>SPM</b>	Small Perturbation Method
<b>SQUID</b>	Superconducting QUantum Interference Device
<b>SSA</b>	Small Slope Approximation
<b>SYDACICO</b>	SYstème de Drones Aériens Communicants Intelligents en Contexte Opérationnel
<b>TSM</b>	Two Scale Method
<b>SyPH</b>	Systèmes Photoniques et Hyperfréquences
<b>UIT</b>	Union Internationale des Télécommunications
<b>WCA</b>	Weighted Curvature Approximation





Première partie

# Présentation et projet de recherche



# Chapitre 1

---

## Présentation générale

---

1.1	État civil . . . . .	4
1.2	Curriculum Vitae . . . . .	4
1.2.1	Formation et titres universitaires principaux . . . . .	4
1.2.2	Formation et titres universitaires complémentaires . . . . .	5
1.2.3	Autre . . . . .	5
1.2.4	Expériences professionnelles . . . . .	5
1.2.5	Activités administratives et collectives . . . . .	5
1.3	Liste des publications et communications . . . . .	9
1.4	Activités d'enseignement . . . . .	16
1.4.1	Enseignement à l'ENSTA Bretagne depuis 2001 . . . . .	16
1.4.2	En tant que vacataire à l'université du Havre 1996-1997 . . . . .	17
1.4.3	Principaux documents pédagogiques . . . . .	17
1.4.4	Volume horaire récapitulatif en enseignement . . . . .	19
1.5	Activités de recherche . . . . .	20
1.5.1	Travaux de recherche de doctorat (1994-1997) . . . . .	20
1.5.2	Travaux de recherche à FORENAP (1998-2001) . . . . .	21
1.5.3	Travaux de recherche à l'ENSTA Bretagne (depuis juin 2001) . . . . .	22
1.6	Activités d'encadrement . . . . .	27

## 1.1 État civil

Nom :	Coatanhay
Prénoms :	Arnaud, Yves, Marcel
Nationalité :	Française
Date de naissance :	17 Décembre 1968
Lieu de naissance :	Gonesse (95)
Situation de famille :	Marié, 1 enfant
Adresse personnelle :	85, rue Alsace-Lorraine, 29200 Brest
Adresse professionnelle :	2, rue François Verny, 29806 Brest cedex 9
Numéro de téléphone personnel :	02 98 49 29 90
Numéro de téléphone professionnel :	02 98 34 88 09
Adresse électronique :	arnaud.coatanhay@ensta-bretagne.fr
Fonction et établissement actuel :	Enseignant-Chercheur au laboratoire Lab-STICC UMR CNRS 6285 Responsable du département STIC de l'ENSTA Bretagne (Brest)

## 1.2 Curriculum Vitae

### 1.2.1 Formation et titres universitaires principaux

2000	<b>Thèse de doctorat (Université du Havre)</b> "Diffusion acoustique par un objet cylindrique à proximité d'une interface plane" EEA spécialité Acoustique Mention très honorable avec les félicitations du jury Université du Havre
1993	<b>Diplôme d'Études Approfondies (Université du Havre)</b> Physique spécialité Instrumentation et Commande Mention assez bien
1993	<b>Diplôme d'Ingénieur</b> École Supérieure d'Ingénieurs en Génie Électrique, ESIGELEC, (Rouen) Option : Automatique Informatique Industrielle traitement du signal
1987	<b>Baccalauréat</b> Spécialité : C

### 1.2.2 Formation et titres universitaires complémentaires

2014-16	<b>Master II (Université de Rennes I)</b> (stage non effectué) Mathématiques fondamentales
2007-09	<b>Master I (Université de Paris VI)</b> Mathématiques fondamentales
1997	<b>Licence de mathématiques (Université de Paris VI)</b>

### 1.2.3 Autre

2007	<b>Qualification</b> aux fonctions de Maître de Conférences par la 63 <sup>ème</sup> section
------	--

### 1.2.4 Expériences professionnelles

Depuis 2012	<b>Enseignant-Chercheur</b> à l'ENSTA Bretagne, Laboratoire Lab-STICC UMR CNRS 6285 Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Information, de la Communication et de la Connaissance
Juin 2001 - Décembre 2011	<b>Enseignant-Chercheur</b> à l'ENSTA Bretagne, Laboratoire E <sup>3</sup> I <sup>2</sup> EA 3876, Extraction et Exploitation de l'Information en Environnements Incertains
Mars 1998 - Mai 2001	<b>Ingénieur de Recherche</b> à FORENAP, FORmation pour la REcherche en Neurosciences Appliquées à la Psychiatrie, Rouffach (68), Responsable du traitement des signaux biomédicaux.
Novembre 1994 - Février 1998	<b>Thèse de doctorat</b> de l'université du Havre 1 LAUE UPRESA 6068, Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électronique, Le Havre (76).
Novembre 1993 - Octobre 1994	<b>Scientifique du Contingent</b> LRBA, Laboratoire de Recherche en Aérodynamique et Ballistique, Vernon (27). Dans le cadre d'un projet Franco-Allemand, étude de la simulation d'un autoguidé missile (onde millimétrique) en phase d'approche.
1993	<b>Stage de DEA</b> au LAUE UPRESA 6068 Durée : 6 mois

### 1.2.5 Activités administratives et collectives

Depuis 2017	Responsable du Département STIC de l'ENSTA Bretagne.
-------------	--

**Volet pédagogique**

2010 - 2014	Responsable du domaine d'enseignement Math-Info à l'ENSTA Bretagne.
2009 - 2012	Responsable du profil d'enseignement PSO (Perception et Systèmes d'Observation) à l'ENSTA Bretagne.
Depuis 2018	Responsable de la formation continue « Introduction aux technologies quantiques pour les sciences de l'information » à l'ENSTA Bretagne.
2005 - 2007	Responsable de la formation continue « Le radar et ses applications » à l'ENSTA Bretagne.
2002 - 2004	Responsable de la formation continue Radar Responsable de la formation continue « Mesures hyperfréquences » et de la formation « Compatibilité électromagnétique » à l'ENSTA Bretagne.
2001 - 2005	Responsable du département d'enseignement STS (Système et Traitement du Signal) à l'ENSTA Bretagne.
Depuis 2001	Régulièrement responsable d'unités d'enseignement dans le domaine Math-Info et dans les domaines physique comme l'optique, les hyperfréquences et l'électromagnétisme.
2019	Séminaire à l'école doctorale MATHSTIC « Introduction aux technologies quantiques pour les sciences de l'information ».

**Volet recherche**

Depuis 2018	Responsable du projet LINASAAL (Liaison et INteractions Air-Sol pour des Aéronefs en Altitude Faible, DGA).
Depuis 2017	Délégation pour la France à l'UIT (L'Union Internationale des Télécommunications) groupe 3, agence des Nations unies.
2012 - 2013	Participation au projet européen de recherche NETMAR (NETworked systems for situational awareness and intervention in MARitime pollution incidents).
2010 - 2011	Responsable du projet de recherche MOPS (Marine Opportunity Passive Systems).
2009 - 2010	Correspondant de l'ENSTA Bretagne pour CELADON (SeaTestBase).
2006 - 2011	Animateur de l'équipe REMT (Radar, ElectroMagnétisme et Télédétection) au sein du laboratoire E3I2 à l'ENSTA Bretagne.
2006 - 2007	Participation au projet de recherche LOCOSS (Système mobile de géolocalisation et télécommunication pour services de secours).
2006 - 2007	Contrat de recherche « Clutter de Mer » pour la société DCN Lorient.
2006 - 2007	Contrat de recherche pour la DGA (LRBA) et la société ERGOSPACE dans le domaine des GNSS.
2003 - 2007	Responsable de 4 contrats de recherche pour DGA (LRBA) dans le domaine des GNSS (Géolocalisation et Navigation par un Système de Satellites).
1998 - 2001	Responsable du traitement des signaux biomédicaux au sein du centre de recherche FORENAP (Formation pour la Recherche en Neurosciences Appliquées à la Psychiatrie).

**Responsabilités collectives et autres**

Depuis 2014	Examinateur au concours Mines-Ponts (Grandes écoles) à l'épreuve « Informatique pour tous ».
Depuis 2006	Examinateur au TIPE Travail d'Initiative Personnelle Encadré (concours des grandes écoles).

Relecteur de plusieurs revues internationales (2 à 3 articles par an) :

- Journal of Computational Acoustics
- IET Radar, Sonar & Navigation
- IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing
- IEEE Transactions on Antennas and Propagation
- IEEE Communications Letters
- European Journal of Applied Mathematics



- Advanced Electromagnetics
- Waves in Random and Complex Media
- Remote Sensing
- Mechanical Systems and Signal Processing
- Journal of Electromagnetic Waves and Applications
- Wave Motion

Depuis 2001 Membre de IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) et depuis 2016 membre de EMS (European Mathematical Society).

## 1.3 Liste des publications et communications

Cette section présente la liste des différentes publications et communications réalisées depuis 1996. (Ces publications sont accessibles sur ma page web : <http://coatanhay.speredarmor.org/publi.html>)

### arXiv et autres (3)

1. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Estimation of the Influence of a Noisy Environment on the Binary Decision Strategy in a Quantum Illumination Radar* (submitted).
2. Nguyen, V.-D., Phan, H., Mansour, A., Coatanhay, A. & Marsault, T. *A generalized recursive Vogler algorithm for multiple bridged knife-edge diffraction* (Accepté pour publication dans la revue IEEE Transactions on Antennas and Propagation). 2022.
3. Coatanhay, A. & Baussard, A. *Qualitative Analysis of the Time-Frequency Signature Induced by a Reflected L-Band Signal from Time Evolving Sea Surfaces*. arXiv :1312.6015 [physics.ao-ph]. 2013.

### Revue internationale (14)

1. Nguyen, V.-D., Phan, H., Mansour, A., Coatanhay, A. & Marsault, T. On the Proof of Recursive Vogler Algorithm for Multiple Knife-Edge Diffraction. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **69**, 3617-3622 (2021).
2. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. Estimation of coherent scattering in dynamic random media. *Waves in Random and Complex Media* **31**, 2301-2326 (2021).
3. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. Estimation of the parameters of stochastic differential equations for sea clutter. *IET Radar, Sonar & Navigation* **13**, 497-504 (2019).
4. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. Forward and backward probabilistic inference of the sea clutter. *Waves in Random and Complex Media* **29**, 540-568 (2019).
5. Coatanhay, A. & Scolan, Y.-M. Adaptive multiscale moment method applied to the electromagnetic scattering by coastal breaking sea waves. **38**, 2041-2052 (2015).
6. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. Optimal High-Order Method of Moment combined with NURBS for the scattering by a 2D cylinder. *Advanced Electromagnetics* **2**, 33-43 (2013).
7. Khairi, R., Coatanhay, A., Khenchaf, A. & Scolan, Y.-M. Numerical modeling of electromagnetic waves scattering from 2D coastal breaking sea waves. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **64**, 24505-24510 (2013).
8. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. Depolarization of Electromagnetic Waves from Bare Soil Surfaces. *Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2010. Series Mathematics in Industry* **16** (éd. Springer, ISBN 978-3-642-22453-9) 107-115 (2012).
9. Ayari, M. Y., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. Simulations of the bistatic scattering using two-scale model and the unified sea spectrum. *J. Appl. Remote Sens.* **1**, 1-19 (2007).
10. Awada, A., Ayari, M., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. Bistatic scattering from an anisotropic sea surface : Numerical comparison between the first-order SSA and the TSM models. *Waves in Random and Complex Media* **16**, 383-394 (2006).

11. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. Scattering by an elastic cylinder embedded in a fluid sediment. Generalized Method of Images (GMI) approach. *Wave Motion* **44**, 77-91 (2006).
12. Pedzisz, M. & Coatanhay, A. Minimum Entropy Approach for Carrier Frequency Recovery. *IEEE Trans. Wireless Communications* **5**, 1-5 (2006).
13. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. Scattering Near a Plane Interface Using a Generalized Method of Images Approach. *J. Comput. Acoust.* **12**, 233-256 (2004).
14. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L. & Boeijinga, P. EEG source identification : Frequency analysis during sleep. *C. R. Biol.* **325**, 1-10 (2002).

#### Revues nationales (1)

1. Coatanhay, A., Richard, C. & Staner, L. Classification en temps-fréquence à partir de données expertisées. *ECA (Extraction des Connaissances et Apprentissage)* **1**, 293-304 (2002).

#### Conférences internationales (60)

1. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Entanglement Decay of Microwave photons in Atmosphere in a Quantum Illumination Radar Scheme* in *Photonics & Electromagnetics Research Symposium Conference PIERS* (avr. 2022).
2. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Study of the atmospheric influence on a quantum illumination radar scheme with an information theory approach* in *European Quantum Technologies Conference EQTC* (2021).
3. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Study of the entanglement Rate Influence in a Quantum Illumination Radar Scheme : Information Theory Approach* in *2021 IEEE Conference on Antenna Measurements Applications (CAMA)* (2021), 118-123. doi :[10.1109/CAMA49227.2021.9703539](https://doi.org/10.1109/CAMA49227.2021.9703539).
4. Nguyen, V.-D., Mansour, A., Coatanhay, A. & Marsault, T. *A Fast Recursive Algorithm for Multiple Bridged Knife-Edge Diffraction* in *2021 29th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)* (2021), 1651-1655. doi :[10.23919/EUSIPCO54536.2021.9615940](https://doi.org/10.23919/EUSIPCO54536.2021.9615940).
5. Nguyen, V.-D., Phan, H., Mansour, A. & Coatanhay, A. *VoglerNet : multiple knife-edge diffraction using deep neural network* in *2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)* (2020), 1-5. doi :[10.23919/EuCAP48036.2020.9135548](https://doi.org/10.23919/EuCAP48036.2020.9135548).
6. Coatanhay, A. *Rough paths theory applied to analyze the electromagnetic field scattered by a time varying sea surface* in *ICEAA* (Granada, Spain, 09-13 September 2019).
7. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. *Stochastic dynamics of sea clutter for applications to remote sensing* in *IGARSS* (Yokohama, Japan, 28 July-02 Aug 2019).
8. Roussel, C., Coatanhay, A. & Baussard, A. *Maximum-likelihood estimation of target parameters in a time-evolving random medium* in *Waves* (Vienna, Austria, 25-30 August 2019).
9. Roussel, C., Coatanhay, A. & Baussard, A. *Stochastic differential equations for the electromagnetic field scattered by the sea surface for remote sensing applications* in *SPA* (Gothenburg, Sweden, nov. 2018).

10. Coatanhay, A. *Identification of the electromagnetic scattering by dynamic sea surfaces with a stochastic differential equation model* in AES (Malaga, Spain, 26-28 July 2016).
11. Coatanhay, A. *Analysis of the sea state observability by radar systems : numerical simulations and stochastic diffusion modeling.* in *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)* (Torino, Italy, 07-11 September 2015).
12. Coatanhay, A. *Electromagnetic scattering by breaking waves : an hp-Adaptive Finite Element approach.* in NEMO (Pavia, Italy, 14-16 May 2014).
13. Baussard, A. & Coatanhay, A. *Analysis of simulated L-Band signals reflected from a sea surface using time-frequency representations.* in OCEANS MTS/IEEE (Bergen, Norway, oct. 2013).
14. Baussard, A. & Coatanhay, A. *Evaluating GNSS Signals for Passive Local Sea State Monitoring.* in SPACE REFLECTO (Brest, France, 04-05 November 2013).
15. Coatanhay, A. & Scolan, Y.-M. *Simulation of the electromagnetic scattering by coastal breaking sea waves in L-band using Adaptive Multiscale Moment Method.* in WISE (Huatulco, Mexico, avr. 2013).
16. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Modeling of electromagnetic Waves scattering from sea surface using Higher-Order Moment Method (HO-MoM) and NURBS Patch* in ICEAA (Torino, Italy, 12-16 September 2011).
17. Tay, S., Maussang, F., Coatanhay, A., Chonavel, T. & Garello, R. *Near sea surface target tracking by extended Kalman filtering of the GPS reflected signals* in OCEANS (Santander, Spain, 06-09 June 2011).
18. Coatanhay, A. *Numerical modeling of the electromagnetic scattering by a sea surface : the MoM and Discontinuous Galerkin Method approaches* in ICEAA (Sydney, Australia, 20-24 September 2010).
19. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *The Observability of Marine Weather Conditions Using the Electromagnetic Waves Scattering from the Sea Surface : A Statistical Analysis* in ICEAA (Sydney, Australia, 20-24 September 2010).
20. Tay, S., Coatanhay, A., Maussang, F. & Garello, R. *A tracking algorithm for GNSS reflected signals on sea surface* in IGARSS (Honolulu, Hawaiï, USA, 25-30 July 2010).
21. Tay, S., Maussang, F., Coatanhay, A. & Garello, R. *Kalman filtering of GPS signals for target tracking application* in PASSIVE (Brest, France, 23-25 June 2010).
22. Coatanhay, A. *Temporal coherence of the electromagnetic field scattered by a moving sea surface in L-band* in IGARSS (Cape Town, South Africa, 12-17 July 2009).
23. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Electromagnetic wave from ocean surface at low grazing angles* in IGARSS (Cape Town, South Africa, 12-17 July 2009).
24. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Electromagnetic Wave Scattering From Sea and Bare Soil Surfaces Based On An Improved Two-Scale Model* in Radar (Bordeaux, France, 12-16 October 2009).
25. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Electromagnetic Wave Scattering From Sea and Bare Soil Surfaces Based On An Improved Two-Scale Model* in Radar (Bordeaux, France, 12-16 October 2009).

26. Tay, S., Maussang, F., Coatanhay, A. & Garello, R. *New concept of passive measure using GNSS reflected signals in oceanographic applications* in *Oceans* (Bremen, Germany, 11-14 May 2009).
27. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Correlation between the NRCS and the wind speed over sea in both monostatic and bistatic configurations* in *IGARSS* (Boston, USA, 06-11 July 2008).
28. Coatanhay, A. *Statistical analysis of the electromagnetic field scattered by the ocean surface in various weather conditions : a numerical study in L-band* in *IGARSS* (Boston, USA, 2008).
29. Coatanhay, A. & Arnold-Bos, A. *Modeling of the Galileo signals near a sea surface* in *GNSS* (Toulouse, 2008).
30. Coatanhay, A., Garello, R., Chapron, B. & Ardhuin, F. *Project MOPS - Marine Opportunity Passive Systems* in *PASSIVE* (Hyères, France, 14-17 October 2008).
31. Coatanhay, A. & Gervaise, C. *Electromagnetic Detectability of the Oil Slicks on a Sea Surface in Bistatic Configuration* in *PIERS* (Cambridge, USA, 02-06 July 2008).
32. Sajjad, N., Khenchaf, A., Coatanhay, A. & Awada, A. *An improved two-scale model for the ocean surface bistatic scattering* in *IGARSS* (Boston, USA, 06-11 July 2008).
33. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Frequency impact on the bistatic radar scattering from an ocean surface* in *IGARSS07* (2007).
34. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Modeling and simulating GNSS signal for sea transport and maritime environment* in *ITST* (Sophia Antipolis, France, juin 2007).
35. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Simulation of a GNSS signal for a receiver near a time-evolving sea surface* in *ICEAA07* (2007).
36. Comblet, F., Betaille, D., Peyret, F., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *GPS and MEMS : high positioning integrity* in *ITST* (Sophia Antipolis, France, juin 2007).
37. André, M., Coatanhay, A., Gervaise, C., Gracia, J., Delory, E. & van der Schaar, M. *Acoustic release of gas bubbles to prevent cetacean entanglement in fishing nets* in *ECS 2006* (2006).
38. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Bistatic Radar scattering from an ocean surface at L-Band* in *RADAR 2006* (2006).
39. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Contribution to Sea Scattering estimation for various Wind Direction* in *IGARSS06* (2006).
40. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Polarimetric bistatic radar scattering behavior of the ocean surface* in *OCEANS* (Singapore, mai 2006).
41. Coatanhay, A. *Scattering by a time evolving rough surface based on a curvilinear coordinate approach* in *IGARSS06* (2006).
42. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Small slope approximation and two scale model in bistatic configuration, application to the sea surface* in *European Conference on Propagation and Systems* (2005).
43. Awada, A., Khenchaf, A., Coatanhay, A. & Ayari, Y. *Comparison between small slope approximation and two scale model in bistatic configuration* in *IGARSS05* (2005).
44. Ayari, M., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *The influence of ripple damping on electromagnetic bistatic scattering by sea surface* in *IGARSS05* (2005).

45. Ayari, M., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Influence of the sea surface on electromagnetic propagation in a sea transport context* in *ITS Telecommunications* (2005).
46. Ayari, M., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Marine oil-spills electromagnetic scattering model using two-scale approach* in *European Conference on Propagation and Systems* (2005).
47. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Model of GPS signal from the ocean based on an electromagnetic scattering theory : Two Scale Model (TSM) approach* in *IGARSS* (2005).
48. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Simulation of GALILEO signals in a maritime environment using an electromagnetic scattering model : influence of the sea state* in *OCEANS05* (2005).
49. Ayari, Y., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Bistatic Electromagnetic Scattering by Sea Surface Using Elfouhaily Spectrum* in *RADAR* (2004).
50. Coatanhay, A. *Simulation of GPS signal in a forest environment using a coherent fractal tree model* in *Mediterranean Microwave Symposium* (2004).
51. Ayari, M. Y., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Electromagnetic Propagation in Troposphere : Inverse Problem Using Optimization Approaches* in *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES* (2003).
52. Coatanhay, A. *Regularization of Laplace transform inversion for subsurface conductivity and permittivity profile estimation using GPR signals* in *IGARSS* (Toulouse, France, juil. 2003).
53. Coatanhay, A. *Optimal GPR signal deconvolution using an adaptive conjugate gradient method* in *IGARSS02* (2002).
54. Coatanhay, A. & Szkolnik, J.-J. *Interface identification using GPR signal : A monte carlo markov chain approach* in *RADAR* (2002).
55. Coatanhay, A., Richard, C., Lengelle, R., Muzet, A. & Macher, J.-P. *Automated detection of K-complexes : characterization of benzodiazepine effects* in *ESRS* (2000).
56. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L., Boeijinga, P., Toussaint, M. & Macher, J.-P. *EEG source identification related to a frequency band : 3D located fluvoxamine effects during REM sleep* in *ISBET* (2000).
57. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L., Boeijinga, P., Toussaint, M. & Macher, J.-P. *Tomographie électromagnétique : mise en évidence des composantes fréquentielles en localisation de source* in *ACM/MDA* (2000).
58. Staner, L., Viardot, G., Coatanhay, A., Toussaint, M., Muzet, A., Luthringer, R., Roegel, J.-C. & Macher, J.-P. *Microarousal and heart rate variability during human sleep* in *ESRS* (2000).
59. Coatanhay, A., Richard, C., Lengelle, R., Muzet, A. & Macher, J.-P. *Time-frequency detection of K-complexes. Methodology and performance estimation* in *WFSRS World Federation of Sleep Research Societies* (Dresde, Germany, 05-09 October 1999).
60. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. *Scattering by an elastic cylinder buried in a sedimentary fluid medium* in *ASA American Society of Acoustic* (Seattle (Wa), USA, 20-26 June 1998).

#### Conférences nationales (12)

1. Coatanhay, A. *Modélisation numérique du champ diffracté par les vagues déferlantes côtières* in *ENVIREM* (Gif-Sur-Yvette, France, 09-10 Juin 2015).

2. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Modélisation de la diffusion électromagnétique par trois types de vagues côtières déferlantes : glissant, plongeant, gonflant* in *JNM* (Paris, France, 15-17 Mai 2013).
3. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Modélisation de la diffusion des ondes électromagnétiques par des vagues côtières déferlantes en utilisant la Méthode des Moments d'Ordre Elevé* in *NUMELEC* (Marseille, France, 03-05 Juillet 2012).
4. Rakotondrainibe, L., Caouren, N., Leroux, Y.-M., Coatanhay, A., Garello, R., Maussang, F., Chapron, B. & Ardhuin, F. *Projet MOPS : Système dédié à l'utilisation des signaux GNSS pour l'océanographie et la surveillance de la surface de la mer* in *JNM* (Brest, France, 18-20 Mai 2011).
5. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *L'observabilité des états de mer pour l'océanographie : Analyse statistique de champs électromagnétiques de diffusion estimés à partir de simulation numérique* in *Workshop EM* (Saint Malo, France, 02-03 Décembre 2010).
6. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Depolarization of Electromagnetic Waves By Sea Surface* in *OCOSS, Sea Tech week* (Brest, France, 21-25 Juin 2010).
7. Coatanhay, A., Garello, R., Chapron, B. & Ardhuin, F. *Le Projet MOPS - La perception du milieu marin par un système de mesure passive utilisant les signaux GNSS* in *Sea Tech week* (Brest, France, 13-17 October 2008).
8. Viardot, G., Lengelle, R., Richard, C. & Coatanhay, A. *Fusion partiellement supervisée d'avis d'experts. application à la décision statistique* in *GRETSI* (2001).
9. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L., Boeijinga, P., Toussaint, M. & Macher, J.-P. *Tomographie électromagnétique : mise en évidence des composantes fréquentielles en localisation de source* in *ACM/MDA Acquisition Conduite par le Modèle* (Grenoble, France, 23-24 November 2000).
10. Viardot, G., Coatanhay, A., Lengelle, R., Richard, C., Staner, L., Muzet, A. & Macher, J.-P. *Fusion d'avis divergents d'experts* in *ACM/MDA* (2000).
11. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. *Etude théorique de la diffusion par un objet cylindrique à proximité d'une interface sédimentaire* in *Congrès Français d'Acoustique* (Marseille, France, 14-18 April 1997).
12. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. *Diffusion par un objet cylindrique à proximité d'une interface élastique* in *Groupe d'Etudes sur la Propagation Acoustique, Actes (DGA-DRET)* (Le Havre, France, 04-05 juin 1996).

### Mémoires (2)

1. Coatanhay, A. *Diffusion acoustique par un objet cylindrique à proximité d'une interface plane* thèse de troisième cycle (Université du Havre, 2000).
2. Coatanhay, A. *Analyse de Wigner-Ville, application à l'étude des ondes acoustiques* mémoire de master (Université du Havre, 1993).

**Rapports de recherche (7)**

1. Nguyen, V.-D., Coatanhay, A. & Mansour, A. *Etude LINASAAB (Liaison et Interactions Air-Sol pour des Aéronefs en Altitude Faible)* rapp. tech. Etude contractuelle avec la DGA-MI (Bruz) (ENSTA Bretagne, 2019).
2. Caouen, N., Arnaold-Bos, A., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Etude de la signature radar du clutter de mer et de la détectabilité d'un navire* rapp. tech. Etude contractuelle avec la société DCNS (Lorient) (ENSTA Bretagne, 2006).
3. Coatanhay, A. *Simulation environnementale dans la caractérisation de la réception SNRS (milieux forestiers)* rapp. tech. Etude contractuelle avec la société ERGOSPACE (Toulouse) (ENSTA Bretagne, 2006).
4. Coatanhay, A. *Amélioration du rapport signal à bruit par des techniques antennaires* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2005).
5. Coatanhay, A. *Réception des signaux GPS au dessus de l'océan* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2004).
6. Coatanhay, A. *Réception des signaux GPS en milieux boisés* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2004).
7. Coatanhay, A. *Détection de signaux GPS à très faible rapport signal à bruit* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2003).



## 1.4 Activités d'enseignement

L'activité d'enseignement revêt à mes yeux une importance majeure. J'ai toujours pris beaucoup de plaisir à communiquer aux étudiants des connaissances certes utiles professionnellement mais aussi susceptibles de leur apporter une ouverture scientifique dans la perception du monde qui les entoure. L'une de mes caractéristiques qui se retrouve fortement dans mon approche pédagogique, est de chercher à mettre en évidence les liens étroits qui existent entre les formalismes mathématiques et la physique ou les sciences de l'ingénieur. Cette démarche m'a amené à beaucoup enseigner les matières de mathématiques générales, de modélisations numériques et de sciences physiques générales comme l'électromagnétisme et la physique ondulatoire. Je me suis adressé à des étudiants de tous niveaux, allant du niveau BAC+1 à celui de seconde année de Master (voire à des formations doctorales). Mes enseignements se sont déroulés dans le contexte de parcours universitaires, de formations d'ingénieurs classiques, de formations d'ingénieurs par alternance ou de formations continues. Cette section s'organise autour de quatre parties. La première présente mes activités pédagogiques depuis 2001 à l'ENSTA Bretagne. La deuxième donne une présentation synthétique des mes activités d'enseignement comme vacataire. La troisième partie dresse une liste des principaux supports pédagogiques que j'ai réalisés. Enfin, la dernière partie présente un bilan récapitulatif de mes différentes interventions.

### 1.4.1 Enseignement à l'ENSTA Bretagne depuis 2001

L'ENSTA Bretagne, école sous la tutelle de la DGA nommée ENSIETA (École Nationale Supérieure des Études et Techniques d'Armement) avant janvier 2012, est le cadre essentiel dans lequel j'ai exercé mon activité pédagogique. Tout naturellement, je me suis vu confié dans un premier temps des enseignements en sciences physiques comme la "propagation acoustique et électromagnétique", les "hyperfréquences", l'"optique et propagation dans les milieux aléatoires", la "fibre optique" et la "mécanique des fluides" qui correspondaient à mes compétences et à mon goût pour le domaine des sciences physiques en général et de la physique ondulatoire en particulier. Par la suite, je me suis attaché à proposer des formations utiles pour mettre en évidence des mécanismes et des formalismes communs à différents domaines d'application. Ainsi, j'ai pu restructurer un certain nombre d'heures d'enseignement pour constituer un cours appelé "Physique du canal" qui regroupait des applications acoustiques (sonar), optiques (laser) et hyperfréquences (radar et télécommunication) sous des formalismes unificateurs de physique ondulatoire qui décrivait de nombreux phénomènes communs à ces différentes applications.

En poursuivant cette logique de formalisme, je me suis massivement investi dans les enseignements de mathématiques généraux comme l'"intégration", l'analyse et l'algèbre pour l'ingénieur généralement en lien avec une mise en œuvre informatique sous Matlab ou Python par exemple. Plus spécifiquement, j'ai proposé, notamment dans un cours "Équations aux Dérivées Partielles (EDP)", de montrer comment des problématiques d'ingénieurs diverses (en mécanique, en électromagnétique, en thermique, en automatique,...) pouvaient être traitées par des approches mathématiques très généralistes, ce qui permet de replacer le problème posé dans une perspective beaucoup plus large. Dans le même esprit, j'ai monté deux enseignements en modélisations numériques pour les sciences de l'ingénieur. L'un était le cours d'"Éléments Finis" et l'autre le cours de "Différences Finies". Beaucoup plus récemment, j'ai aussi monté le cours de "Calcul Variationnel" qui unifie encore d'avantage les sciences de l'ingénieur aux sciences physiques fondamentales. Dernièrement, j'ai aussi créé un cours de "Calcul stochastique pour l'ingénieur" pour traiter avec un minimum

de rigueur les évolutions aléatoires des observations de l'environnement naturel (télétection et télécommunication).

Étant d'un naturel ouvert et avec assez grande polyvalence scientifique, j'ai été régulièrement amené à enseigner dans des domaines très variés comme l'automatique, le traitement d'image, la théorie de la décision ou les systèmes GNSS (GPS, GALILEO,...). Par ailleurs, même si mes interventions ont principalement eu lieu dans le cycle d'ingénieurs classique, j'ai également enseigné dans le cycle de formation par alternance (surtout des compléments de mathématiques), cycle de master spécialisé (cours de "Vision pour la robotique") et en formation continue (cours "Le radar et ses applications" et "Compatibilité Électromagnétique"). En collaboration avec Christophe Osswald (enseignant-chercheur à l'ENSTA Bretagne), nous avons proposé une formation d'une semaine complète aux enseignants des classes préparatoires "Langage Python - De la calculatrice au langage objet" pour les aider à introduire l'informatique dans le cycle préparatoire des grandes écoles.

Pour terminer, je tiens à souligner le fait que je viens de monter une toute nouvelle offre de formation continue "Introduction aux technologies quantiques pour les sciences de l'information". Ce cours a été repris sous forme abrégée "Sensibilisation aux technologies quantiques pour les sciences de l'information" comme formation doctorale pour l'école doctorale MATH-STIC. Sur la même thématique, dans le cadre d'un projet étudiant de 2<sup>ème</sup> année impliquant 5 étudiants, je suis à l'origine de la création du "QClub" de l'ENSTA Bretagne qui a pour vocation de développer les technologies quantiques, notamment la programmation sur calculateur quantique, au sein de notre établissement.

### 1.4.2 En tant que vacataire à l'université du Havre 1996-1997

Durant mon doctorat, j'ai enseigné durant deux ans à l'université du Havre dans le cadre de deux formations distinctes.

La première se déroulait dans le cadre d'une année de préparation au CAPES de physique où je devais assurer un certain nombre de TD. Ces TD dont une grande partie était constituée de rappels de cours, portaient sur les lois fondamentales de la mécanique (PFD, énergie, quantité de mouvement,...), sur la mécanique du point (référentiels, forces fictives,...), sur les moments d'inertie ou sur les lois de la gravité. Le but était de résoudre le plus rigoureusement possible des problèmes classiquement rencontrés au concours du CAPES.

La seconde était un ensemble de TD assurés au niveau du DEUG 2<sup>ème</sup> année. Ces TD avaient pour principale vocation d'initier les étudiants aux nombreux phénomènes physiques qui peuvent être traités par un formalisme ondulatoire ou vibratoire : Corde vibrante (notion d'harmonique), acoustique musicale, effet Doppler, interférences (fentes de Young), oscillation couple électron-proton,...

### 1.4.3 Principaux documents pédagogiques

1. **A. Coatanhay** et F. Pellen, Optique et Propagation dans les milieux aléatoires, Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2007, 96 pages.
2. **A. Coatanhay**, Physique du canal, Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2009, 106 pages.
3. **A. Coatanhay**, Modélisation électromagnétique - Introduction aux approches numériques, Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2011, 100 pages.

4. **A. Coatanhay**, Méthode des différences finies, Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2012, 50 pages.
5. **A. Coatanhay**, Équations aux dérivées partielles et méthode des éléments finis, Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2014, 183 pages.
6. **A. Coatanhay**, Équations aux dérivées partielles (méthodes analytiques), Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2019, 177 pages.
7. **A. Coatanhay**, Calcul variationnel appliqué aux sciences de l'ingénieur, Polycopié de cours ENSTA Bretagne, 2019, 99 pages.

## 1.4.4 Volume horaire récapitulatif en enseignement

Lieu	Intitulé	Type	Charge horaire (eq. TD)	Cycle
<b>ENSTA Bretagne Brest</b>	Intégration	TD	75 h (sur 5 ans)	L
		BE	50 h (sur 5 ans)	L
	Analyse et algèbre	TD	300 h (sur 19 ans)	L
	Informatique	TD	724 h (sur 17 ans)	L
	Équations aux dérivées partielles	CM	187 h (sur 11 ans)	M
		TD	264 h (sur 11 ans)	M
		BE	33 h (sur 11 ans)	M
	Calcul stochastique pour l'ingénieur	CM	30 h (sur 2 ans)	M
		TD	30 h (sur 2 ans)	M
	Mécanique des fluides	TD	52 h (sur 2 ans)	M
		CM	90 h (sur 5 ans)	M
	Optique et propagation dans les milieux aléatoires	TD	45 h (sur 5 ans)	M
		TP	10 h (sur 5 ans)	M
	Fibre optique	TP	48 h (sur 4 ans)	M
	Méthodes numériques pour l'électromagnétisme	CM	75 h (sur 5 ans)	M
		TD	70 h (sur 5 ans)	M
	Physique du canal	CM	112 h (sur 7 ans)	M
		TD	56 h (sur 7 ans)	M
	Différences finies	CM	15 h (sur 3 ans)	M
		TD	21 h (sur 3 ans)	M
	GNSS	CM	32 h (sur 4 ans)	M
		TD	20 h (sur 4 ans)	M
	OPEN GL	TD	36 h (sur 3 ans)	M
	Le radar et ses applications	CM	14 h (sur 3 ans)	M
		TD	9 h (sur 3 ans)	M
	Différences finies	CM	60 h (sur 4 ans)	M
		TD	16 h (sur 4 ans)	M
Vision robotique	CM	18 h (sur 3 ans)	D	
	TD	9 h (sur 3 ans)	D	
Techno. quantique	CM	3 h	D	
<b>Université Le Havre</b>	Physique des ondes	TD	40h (sur 2 ans)	L
	CAPES de physique	TD	80h (sur 2 ans)	M
	Total ens. principaux	eq. TD	2611 h	de L à D
	Enseignements divers, encadrement de projets, soutenances,...	eq. TD (estim.)	950 h (sur 19 ans)	de L à D
	<b>Total</b>	<b>eq. TD</b>	<b>3560 h (env.)</b>	

Le public visé correspond aux cycles équivalents de licence (L), master (M) et troisième cycle (D).

Mes activités incluent très régulièrement l'encadrement d'étudiants lors des projets "bibliographie" (1<sup>ère</sup> année), des projets "système" (2<sup>ème</sup> année) et des projets "application système" (3<sup>ème</sup> année) dans le cadre de la formation du cycle d'ingénieur à l'ENSTA Bretagne. De même, je participe comme jury aux soutenances de stages réalisées par ces étudiants (stages de 2<sup>ème</sup> année et stages de fin d'étude).

## 1.5 Activités de recherche

La totalité de mon activité de recherche a pour objet l'interaction des ondes, essentiellement électromagnétiques, avec leur environnement (milieux, géométries des diffuseurs,...) et la mise en évidence de l'information qu'il est possible d'en retirer. Dans cet objectif, une approche classique consiste à considérer uniquement la mesure de l'onde traduite sous la forme d'un signal que l'on peut exploiter à l'aide de méthodologies génériques. Même si j'ai pu être amené à appliquer ce type d'approche, ce n'est pas du tout la voie que je privilégie. Mon objectif est, au contraire, de développer la modélisation mathématique des phénomènes physiques impliqués et de comprendre dans quelle mesure tel modèle plutôt qu'un autre facilitera l'interprétation complexe de l'interaction ondes-environnement.

### 1.5.1 Travaux de recherche de doctorat (1994-1997)

**Titre :** Diffusion acoustique par un objet cylindrique à proximité d'une interface plane

**Lieu :** IUT, Le Havre (76)

**Laboratoire :** LAUE - UMR 6068

**Équipe :** Modélisation théorique

**Lieu d'inscription :** Université du Havre

**Mots clés :** Acoustique sous-marine, Diffusion acoustique par des cylindre, Interactions cylindre-plan, Séries divergentes.

**Directeur de thèse :** DR J.-M. Conoir

Courriel : jeanmarc.conoir@iut-lehavre.fr

**Directeur du laboratoire :** Pr. J. Ripoche

Thèse soutenue le 26 janvier 2000 devant la commission d'examen :

**Président de jury :** DR M. Trinité, Directeur de Recherche au CNRS de Rouen.

**Rapporteurs :** CR M. Rousseau, Chargé de Recherche au CNRS de Paris VI et Frédéric Molinet, Directeur de la société MOTHEMIM.

**Directeur :** DR J.-M. Conoir, Directeur de Recherche au CNRS du Havre.

**Examineurs :** CR J. Hardy, Chargé de Recherche au CNRS de Angers, Pr. F. Luppé, Professeur à l'Université du Havre et Pr. G. Maze, Professeur à l'Université du Havre.

**Travail :** Un stage de DEA, effectué au LAUE, m'avait déjà permis de me familiariser avec les phénomènes d'ondes de surface qui apparaissent lorsqu'une onde, ici acoustique, interagit avec un diffuseur (plaques, cylindriques,...). En appliquant des approches de type analyse temps-fréquences (Wigner-Ville, transformées des classes de Cohen), j'avais pu mettre en évidence les propriétés des différentes ondes de surfaces (Rayleigh, ondes S,...), leur vitesse de phase et de groupe notamment.

Néanmoins, ma première activité de recherche significative en terme de modélisation a été le travail mené dans le cadre de ma thèse, toujours au LAUE. Un cadre naturel pour décrire le champ diffusé par une forme géométrique est d'utiliser la théorie modale, c'est à dire mathématiquement d'exprimer les ondes diffusées sur la base des fonctions propres de l'opérateur différentiel des ondes (ou de l'opérateur de Helmholtz dans le cas monochromatique). Concrètement, pour un système de coordonnées cylindrique ou sphérique, cette base de fonctions propres correspond à une base de fonctions de Bessel et l'utilisation de ce modèle est en général relativement simple. Quand le

diffuseur ainsi modélisé se trouve à proximité d'une interface non-bornée, classiquement une interface plane, le problème devient beaucoup plus délicat. Une solution élégante, utilisant la méthode des images, existe dès lors que l'interface possède une condition aux frontières de type Dirichlet ou Neumann (parfaitement molle ou parfaitement rigide en acoustique, parfaitement conductrice en électromagnétisme). Dans le cas d'une interface pénétrable, le problème était alors ouvert.

J'ai pu montrer qu'il était possible de généraliser la méthode des images, en faisant apparaître des séries géométriques plus complexes d'opérateurs de diffusion, voir [CI56]. Le problème soulevé est que ces séries étaient violemment divergentes (termes de la série divergeant de façon exponentielle). La problématique des séries divergentes en physique se retrouve dans un certain nombre de domaines, en astronomie par exemple, voir les travaux de Poincaré, ou en mécanique quantique pour l'effet Casimir, mais pour ma problématique, il s'agissait d'une nouveauté.

En effectuant certaines manipulations sur ces séries, j'ai pu montrer que l'on pouvait obtenir une modélisation pertinente du phénomène [RI11,RI13]. Pour démontrer la légitimité de mon approche, j'ai étudié la cohérence de ma théorie avec une autre approche méthodologique, la théorie de rayon, le passage entre la théorie modale et la théorie de rayon étant donné par la transformation de Sommerfeld-Watson dans le plan complexe.

Il est à noter que même si les théories développées dans le cadre de ma thèse ont été appliquées aux ondes acoustiques, elles peuvent être utilisées pour des ondes électromagnétiques sans en changer la moindre virgule. On notera également que mes compétences dans le domaine de la théorie de rayon, initiées à cette époque, ont continué à se développer, bien des années plus tard, dans le contexte de l'interaction des ondes électromagnétiques avec les milieux naturels ou urbains [CI46,R3,R4,R7].

### 1.5.2 Travaux de recherche à FORENAP (1998-2001)

**Lieu :** FORENAP, Rouffach (68)

**Mots clés :** Signaux électromagnétiques, Neuro-sciences, Activités cérébrales, Électro-Encéphalographie, Magnéto-Encéphalographie, Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire, Localisation de sources.

**Responsable :** Pr. P. Macher

Avant même la finalisation de ma thèse, j'ai eu l'opportunité de travailler comme ingénieur de recherche au sein du centre FORENAP, sur l'analyse des signaux électromagnétiques issus de l'activité cérébrale impliquant notamment des systèmes électro-encéphalographiques tomographiques (EEGT), des systèmes magnéto-encéphalographiques (MEG) fondés sur les mesures du champ magnétique par effet quantique (SQUID) et de l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Compte tenu de la complexité des phénomènes mis en jeu, ma première démarche a été d'analyser ces signaux par le biais des techniques de traitement du signal [CI51-155] ou de la théorie de l'information [RN1]. Ces techniques m'ont permis de mettre en évidence l'influence des pathologies ou des traitements pharmaceutiques sur les différentes mesures électromagnétiques prises lors des différentes phases de sommeil par exemple.

Néanmoins, ces premières démarches me laissaient un certain sentiment de frustration et ne correspondaient pas exactement à la voie que je souhaitais approfondir, c'est à dire la modélisation. C'est ainsi que dans un second temps, j'ai cherché à interpréter les ondes électromagnétiques cérébrales comme le résultat de sources électromagnétiques (dipôles de courant) modélisant les sources neuronales principales. Cette approche simplifiée de la modélisation d'un cerveau se heurte bien évidemment à la gestion de la complexité (régularisation de l'identification des paramètres par

exemple), à la variabilité de la géométrie et des caractéristiques diélectriques des différentes têtes (matière blanche, matière grise, boîte crânienne,...). C'est ainsi que j'ai été amené à réaliser mon travail de modélisation dans le cadre théorique appelé LORETA (LOW RESolution Tomographie) qui permet la régularisation de ce type de problème inverse mal-posé. Cette approche m'a permis de mettre en évidence des informations liées à l'activité cérébrales de façon beaucoup plus efficace que des techniques de traitement plus classiques [RI14]. Ce travail a été notamment été référencé par Pascual-Marqui comme contribution significative aux approches LORETA.

### 1.5.3 Travaux de recherche à l'ENSTA Bretagne (depuis juin 2001)

**Lieu :** ENSTA Bretagne (anciennement ENSIETA), Brest (29)

**Laboratoire :** E<sup>3</sup>I<sup>2</sup> - EA 3876 (jusqu'à déc. 2011) et Lab-STICC - UMR 6285 (depuis janv. 2012)

**Équipe :** REMT (Radar, ÉlectroMagnétisme et Télédétection) jusqu'à 2011 et PIM (Propagation et Interactions Multi-échelles) depuis 2012

**Mots clés :** Onde, Électromagnétisme, Télédétection, Radar, Milieu naturels, Milieux Maritimes, Milieux aléatoires, Systèmes dynamiques.

**Responsable :** Pr. A. Khenchaf

Courriel : ali.khenchaf@ensta-bretagne.fr

Après les 3 années passées dans le contexte biomédical, j'ai souhaité m'orienter vers des problématiques plus clairement orientées vers les modèles physiques des ondes. C'est ainsi que j'ai intégré l'ENSTA Bretagne (ex ENSIETA) et que je suis devenu membre du laboratoire E<sup>3</sup>I<sup>2</sup> dont les thématiques portaient en grande partie sur la modélisation et la caractérisation de l'interaction ondes-environnements naturels. À partir de 2006, j'ai pris la responsabilité de l'une des trois équipes de recherche, appelée REMT (Radar, ElectroMagnétisme et Télédétection), de ce laboratoire. C'est ainsi que j'ai poursuivi mes activités de recherche au sein de l'équipe PIM (Propagation et Interactions Multi-échelles) et qui fait partie respectivement du pôle MOM (Micro-ondes, Optoelectronique, Matériaux) de 2012 à 2020 et du pôle SyPH (Systèmes Photoniques et Hyperfréquences) depuis 2021.

#### Premières thématiques de recherche

La première problématique sur laquelle je me suis penché a été la propagation électromagnétique en milieux perturbés avec de fortes hétérogénéités. L'application directe de cette problématique était l'utilisation des systèmes Radar à Pénétration de Sol - RPS (Ground Penetrating Radar- GPR) pour sous-sol naturels à faible profondeur. Ces études se sont faites en collaboration avec le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) à Nantes, devenu depuis l'IFSTTAR.

Là encore, la première approche a été de travailler sur le signal en utilisant des algorithmes classiques de déconvolution qui permettaient d'améliorer le contraste de l'imagerie radar [CI49]. En parallèle, j'ai cherché à développer la modélisation en proposant un modèle aléatoire de type markovien [CI50] et un autre déterministe impliquant une inversion liée à un problème mal-posé [CI48].

Ce travail sur les systèmes RPS s'est accompagné d'une réflexion plus générale sur l'information portée par une onde électromagnétique traversant un milieu fortement aléatoire. Plus précisément, j'ai étudié l'évolution de l'entropie de Shannon associée à cette onde dans ce contexte. Cette démarche a permis dans le cadre d'un stage de master que j'ai encadré, de développer une méthode

d'identification de signaux radar fortement bruités [RI12].

Durant cette période, le point de vue privilégié a été de considérer le milieu de propagation comme un ensemble de perturbations volumiques. Il s'est avéré que dans le cadre du GPR, cela constituait une limitation majeure au traitement de la problématique. En effet, à l'interface air-sol ou aux interfaces correspondants aux différentes strates de terrain, il était essentiel de considérer la diffusion par des surfaces irrégulières mais cohérentes. Cette problématique est devenue incontournable et, naturellement, j'ai été amené à recentrer mon activité de recherche sur la théorie de la diffusion par des surfaces rugueuses.

### La diffusion électromagnétique par les surfaces maritimes

L'étude sur la diffusion par des surfaces rugueuses, entamée dans le contexte des systèmes RPS, m'a permis en toute logique de nombreuses collaborations dans le domaine de la diffusion par des surfaces maritimes. Ces différentes contributions m'ont conduit à mener de nombreux projets sur cette thématique et j'ai pu ainsi découvrir la richesse des problématiques scientifiques qui en découlent. Cela explique pourquoi, à l'heure actuelle, mes activités de recherches portent de façon prioritaire sur l'interaction des ondes électromagnétiques avec les environnements maritimes. Mes études sur les environnements maritimes, par des moyens électromagnétiques, a, comme premiers objectifs, de modéliser les interactions avec ces milieux pour extraire une information utile (applications en télédétection), pour modéliser les perturbations induites (applications en télécommunications) ou pour mieux identifier une cible, de type bateau, avions ou autre, dans cet environnement (applications en détection de cibles). C'est clairement un axe de recherche qui correspond à mes aspirations scientifiques.

**Les méthodes asymptotiques** Pour traiter de la diffusion par des surfaces de mer assimilées à des surfaces rugueuses, l'approche la plus courante est d'utiliser les méthodes dites asymptotiques. Dans ce type de modélisation, l'idée des méthodes asymptotiques est de ramener l'interaction d'une surface irrégulière à une interface régulière mais possédant des propriétés de rugosité décrite mathématiquement par des opérateurs intégral-différentiels obtenus en faisant certaines approximations physiques. Plus concrètement, une surface de mer engendrée par un processus complexe d'interaction entre le vent et le liquide, peut être considérée comme aléatoire et se caractérise généralement par la donnée d'un spectre, obtenu par la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation de la surface aléatoire. En considérant, l'espérance mathématique de tous ces spectres, il est possible de parler du spectre de mer moyen pour un état de mer donné que l'on nomme simplement spectre de mer. On peut citer des modèles de spectre de mer comme le spectre d'Elfouhaily ou celui de Pierson-Moskowitz, qui s'appuient sur des approches théoriques ou expérimentales pour décrire la rugosité de la surface de la mer en fonction de la vitesse du vent. Pour traduire ce modèle du surface de mer en propriété de rugosité pour l'interaction avec une onde électromagnétique, il existe une grande quantité d'approches qui s'appuient sur des hypothèses variées (faible amplitude de rugosité, faible courbure, faible pentes,...). Ces approches sont en général évaluées en configurations monostatiques (la direction d'observation est aussi la direction incidente) ou en propagation avant (dans la direction du spéculaire). La configuration monostatique (l'émetteur est aussi le récepteur) correspond à la grande majorité des systèmes radar opérationnels actuellement. Toutefois, dans les systèmes d'observation plus élaborés, les émetteurs et les récepteurs peuvent être amenés à se différencier.

C'est sur cette thématique de modélisation des surfaces rugueuses par les méthodes asymp-



totiques que j'ai pu nouer une collaboration forte avec Ali Khenchaf. C'est dans le cadre de cette collaboration que j'ai assuré le co-encadrement des thèses de Ahmad Awada et de Naheed Sajjad. La première thèse s'attachait à la méthodologie générale de résolution de la diffusion électromagnétique par des surfaces de mer. Plus précisément, l'objectif était de comparer les méthodes asymptotiques dans un contexte de mesures bistatiques pour différentes conditions de vents, en bande L et Ku. En plus des méthodes classiques, deux méthodes ont fait l'objet d'une attention particulière. Il s'agissait de la méthode deux échelles (TSM Two Scale Method) et de la méthode des petites pentes (SSA Small Slope Approximation) [RI10]. Par ailleurs, une étude plus spécifique pour montrer l'influence du modèle de spectre de mer (Elfouhaily vs McDaniel) a été réalisée [CI23, CI29, CI34-36, CI38-39]. La seconde thèse portait sur la problématique de modélisation spécifique liée à la diffusion électromagnétique en incidence rasante. En effet, lorsque une onde électromagnétique est très inclinée, c'est à dire avec une direction de propagation proche de la surface, les modèles asymptotiques classiques ont beaucoup de mal à donner une estimation fiable du champ électromagnétique diffusé. L'objectif était donc ici d'améliorer ces modèles pour pallier ce problème. Plus précisément, une étude approfondie a été menée sur un modèle deux-échelles calculé au second ordre [RI8, CI19-21, CI28].

Toujours dans le cadre de la collaboration avec Ali Khenchaf, j'ai été à l'initiative du travail de recherche mené dans le cadre de la thèse de Yacine Ayari concernant l'influence des changements des états de surface de mer sur les champs électromagnétiques diffractés. Plus concrètement, cette thèse avait pour objectif de quantifier l'effet de la pollution sur le champ électromagnétique diffusé. En effet, un polluant de type hydrocarbure de par sa viscosité (et d'autres paramètres du matériau) peut modifier le spectre de rugosité de la mer (damping) et donc modifier sa signature électromagnétique. Ce phénomène est particulièrement important lorsque la vitesse de vent n'est pas trop grande et que le polluant se trouve sous forme de nappe. La permittivité de la surface maritime devient celle du polluant. Lorsque la mer est beaucoup plus agitée, la surface polluée se présente sous la forme d'une émulsion (eau-pétrole par exemple). Le spectre de rugosité de la surface n'est plus modifié par rapport à une mer propre. Seule, la permittivité de l'émulsion en fonction du pourcentage de polluant, se différenciera du cas d'une mer non polluée. Nous avons repris les modèles hydrodynamiques des polluants, reconstruit les nouveaux spectres de mer en présence de polluant et enfin montré que cette pollution pouvait être plus ou moins visible suivant les configurations bistatiques et les polarisations choisies. Dans le cas d'une émulsion eau de mer-pétrole nous avons également étudié la visibilité du polluant en fonction de la configuration, de la polarisation et de la concentration en pétrole [RI9, CI40-42, CI45, CI47].

**Le point de vue temporel** Les approches de type méthodes asymptotiques sont extrêmement puissantes dans la mesure où elle permettent de modéliser efficacement une interaction onde-interface complexe. Elles permettent en pratique de répondre à beaucoup de situations expérimentales de façon très pertinente. Elles donnent également accès à un bon niveau de compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.

Cependant elles ne pouvaient pas, par construction, répondre à l'une des mes interrogations fortes : quels sont les liens entre les déformations temporelles des surfaces de mer et les champs électromagnétiques diffractés ? Quelles informations nouvelles peuvent être mises en évidence dès lors que l'on choisit de considérer l'élément temporel ? Ce type de questionnement a été à l'origine de la rédaction de l'article [A1]. Au mieux, les approches asymptotiques ne prennent en compte la dynamique du système qu'au travers des effets Doppler. Le point de vue temporel implique des problématiques nouvelles et nécessite des approches méthodologiques différentes.

**Définir un cadre applicatif** Un radar classique en environnement maritime illumine un élément de surface de mer pendant une durée si brève que celle-ci peut sans problème être considérée comme immobile, ou en tout cas non déformable. Pourtant, la thématique de l'évolution temporelle ne doit pas, à mon sens, être uniquement une problématique théorique. Cette problématique doit se justifier par un certain nombre d'applications envisageables dans un cadre opérationnel. Pour cela, il est nécessaire de considérer une source d'onde électromagnétique cohérente qui permette une observation de la mer pendant une durée longue. Ceci explique, en grande partie, mon intérêt pour les signaux GPS et autres systèmes GNSS, vus comme des sources d'opportunités d'ondes cohérentes et parfaitement déterministes, ce qui ouvre des possibilités en terme d'observation passive de la mer.

Ce cadre applicatif m'a permis de nombreuses collaborations qu'il s'agisse d'études [RI9, CI9-10, CI18, CI24-25, CI30-32, CI43-44, CI46], de contrats de recherche [R3-R8], de projets de recherches [CI26, CN4] ou même de la thèse de Sarab Tay dirigée par le Pr. René Garello [CI13, CI16-17, CI22].

**Approches déterministes** L'approche la plus évidente pour étudier l'influence de la déformation temporelle d'une surface de mer sur le champ électromagnétique diffracté est l'ensemble des modélisations déterministes de la diffraction. Dans une première approche et en collaboration avec Andréas Arnold-Bos qui avait développé, dans le cadre de ses travaux de thèse, un logiciel de simulation s'appuyant pour l'essentiel sur la théorie de rayon, j'ai pu réaliser mes premières simulations numériques qui m'ont permis de mettre en lumière certains effets électromagnétiques de l'évolution temporelle de surfaces de mer sous différentes conditions de vent [CI26]. J'ai par ailleurs appliqué des approches numériques plus classiques de type méthodes des moments pour compléter ce travail [CI24, CI25].

Ce travail théorique et numérique a fait apparaître la nécessité de mieux modéliser le champ électromagnétique des vagues côtières et en particulier lorsque des phénomènes de déferlement se produisent. C'est dans cette logique que j'ai lancé la thèse de Refzul Khairi qu'Ali Khenchaf a accepté de diriger. L'objectif de ce travail de thèse était d'étudier l'interaction des ondes électromagnétiques en bande L avec les vagues côtières déferlantes, en particulier pour un observateur situé à proximité de la surface. Le travail s'attachait à effectuer une modélisation électromagnétique précise en lien étroit avec le modèle hydrodynamique. Pour modéliser et calculer les champs électromagnétiques diffusés par les vagues déferlantes, nous utilisons une approche numérique par intégrale de frontière, notamment la Méthode des Moments (MdM). Le premier point clé de ce travail de thèse a été de mettre en œuvre une simulation hydrodynamique des surfaces de vagues déferlantes. Ceci a été rendu possible grâce à une collaboration avec le Pr. Yves-Marie Scolan spécialiste de la mécanique des fluides. Le second point important était que le déferlement induit de fortes courbures géométriques dans le profil des vagues. Les techniques classiques de MdM posent alors des problèmes importants de convergence numérique. Pour tenter de résoudre ces problèmes, nous avons développé des méthodes de moments aux ordres supérieurs [RI6, RI7, CI12, CI15]. En cherchant à approfondir cette problématique, toujours en collaboration avec le Pr. Yves-Marie Scolan, j'ai développé une approche numérique de type maillage fractal appelée Adaptive Multiscale Moment Method (AMMM) [RI5]. Le premier objectif était d'adapter la finesse du maillage à la courbure des profils de vague. Le second objectif était de faire apparaître des effets d'échelles dans cette modélisation de champs diffractés.

**Approches stochastiques** La troisième grande famille de méthodes pour modéliser le champ électromagnétique diffusé par une surface de mer est la classe des approches statistiques. Typique-

ment, la surface de mer est assimilée à un ensemble de diffuseurs discrets renvoyant l'onde incidente avec une amplitude et une phase aléatoire. L'exemple le plus connu est de considérer la diffusion par un grand nombre de ces diffuseurs identiques. On montre alors par le théorème central limite que l'amplitude du champ total réémis est une variable aléatoire qui suit une distribution de Rayleigh ou, en introduisant une probabilité gaussienne des amplitudes pour chaque diffuseur, une K-distribution. Ce genre de modélisation a fait l'objet d'un grand nombre de publications notamment pour l'imagerie radar. Par contre, dès lors que l'on considère l'évolution temporelle de ces variables aléatoires la problématique devient nettement plus complexe. Dans une première approche, il est possible d'introduire une certaine corrélation temporelle, par exemple sous la forme d'une loi exponentielle décroissante. Néanmoins, il m'a semblé intéressant d'introduire explicitement le temps dans la modélisation statistique elle-même. C'est ainsi que je me suis intéressé aux travaux de mathématiques appliquées du Pr. Timothy R. Field (McMaster University) qui démontre, sous certaines hypothèses, que cette problématique peut se modéliser sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques dépendant de 3 paramètres constants  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$ . J'ai cherché à appliquer cette approche dans le cadre de la diffusion par une surface de mer. Dans la logique de cette recherche, j'ai lancé la thèse de Clément Roussel qu'Alexandre Baussard a accepté de diriger et qui portait sur la modélisation stochastique des champs électromagnétiques diffusés par des surfaces de mer en mouvement. Un travail important a été mené sur les probabilités de transition entre les variables aléatoires décrivant respectivement aux champs mesurés au temps  $t_1$  et au temps  $t_2$  (résolution analytique et numériques d'équations de Fokker-Planck). Des contributions originales ont été apportées à la problématique de l'identification des paramètres  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$  à partir de mesures radar réalistes [RI2-4].

### Modélisation de canal en télécommunication

Mes travaux avaient alors surtout porté sur la modélisation de l'interaction ondes électromagnétiques - environnements. Il s'est avéré que mon travail pouvait également servir à la modélisation physique des canaux de propagation pour des applications télécommunication. J'ai ainsi pu collaborer avec l'Agence Nationale des Fréquences (ANFR) et la DGA-MI. Ceci explique mon implication dans le groupe 3 (qui correspond à la modélisation physique des canaux de transmission) de l'Union Internationale des Télécommunications UIT (agence de l'ONU). Dans le cadre de cette collaboration, j'ai pu développer de nouveaux modèles physiques pour la propagation en milieux montagneux [RI1].

## 1.6 Activités d'encadrement

Cette section présente mes différentes activités d'encadrement qui ont été menées depuis 2002.

### Encadrement de Post-Doc (2)

- Viet-Dung Nguyen (depuis 2019 : pour 2 ans), (50%) sur le projet LINASAAF, étude : Modéliser les télécommunications et les liaisons radar entre une station au sol et un système aéronautique, drone notamment, volant à faible altitude.
- Lahatra Rakotondrainibe (2010-2011 : 1 an), (50%) sur le projet MOPS, étude : Développer un système hyperfréquence de réception des signaux GPS diffusé par une surface de mer.

### Encadrement de Thèses (1 en cours, 6 soutenues)

#### Sylvain Borderieux (70%)

**Sujet de thèse :** Couplage optique/micro-onde quantique dans la perspective du radar quantique.

**Directeur de thèse :** A. Khenchaf (Lab-STICC - ENSTA Bretagne)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2019

**Date de soutenance de thèse :** automne 2022

**Financement :** Bourse DGA (100%)

#### Clément Roussel (70%)

**Sujet de thèse :** Stochastic differential equations for the electromagnetic field scattered by the sea surface : applications to remote sensing.

**Directeur de thèse :** A. Baussard (Lab-STICC - ENSTA Bretagne)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2016

**Date de soutenance de thèse :** 04 septembre 2019

**Financement :** Bourse DGA (100%)

#### Refzul Khairi (70%)

**Sujet de thèse :** Modélisation de la diffusion électromagnétique par les vagues côtières déferlantes.

**Directeur de thèse :** A. Khenchaf (Lab-STICC - ENSTA Bretagne)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2009

**Date de soutenance de thèse :** 11 mars 2013

**Financement :** Bourse région Bretagne (50%) et BMO (50%)

#### Sarab Tay (30%)

**Sujet de thèse :** Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin.

**Directeur de thèse :** R. Garello (Lab-STICC - IMT Atlantique)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2008

**Date de soutenance de thèse :** 06 février 2012

**Financement :** Bourse région Bretagne (100%)

**Naheed Sajjad (30%)**

**Sujet de thèse :** Bistatic scattering of electromagnetic waves from rough surface by using second order twoscale model : Application to sea and bare soil surface.

**Directeur de thèse :** A. Khenchaf (E<sup>3</sup>I<sup>2</sup> - ENSTA Bretagne)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2007

**Date de soutenance de thèse :** 07 juillet 2011

**Financement :** Financement Franco-Pakistanais (SFERE)

**Ahmad Awada (30%)**

**Sujet de thèse :** Diffusion bistatique des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse en utilisant l'approximation SSA : Application à la surface maritime.

**Directeur de thèse :** A. Khenchaf (E<sup>3</sup>I<sup>2</sup> - ENSTA Bretagne)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2002

**Date de soutenance de thèse :** 29 Juin 2007

**Financement :** Financement propre E<sup>3</sup>I<sup>2</sup>

**Mohamed Yassine Ayari (50%)**

**Sujet de thèse :** Détection électromagnétique d'éléments polluants au dessus de la surface maritime.

**Directeur de thèse :** A. Khenchaf (E<sup>3</sup>I<sup>2</sup> - ENSTA Bretagne)

**Début de thèse :** 1<sup>er</sup> octobre 2002

**Date de soutenance de thèse :** 10 Février 2006

**Financement :** Bourse BMO (100%)

**Encadrement de stages de master ou équivalents**

J'ai régulièrement encadré (à un taux de 100%) des étudiants de l'ENSTA Bretagne, de l'UBO (Université de Bretagne Occidentale) ou d'universités étrangères lors de leur stage de master : Emmanuel Cosquer (2002), Ali Beydoun (2004), Maciej Pedzisz (2006), Yasar Kutuvantavida (2007), Sarab Tay (2008), Nahib Azouaoui (2008), Ghada Megrehi (2011) et Lassaad Sakri (2012).

## Chapitre 2

---

# Projet de recherche

---

## 2.1 Motivations et projet de recherche à 4 ans

Dans une perspective générale, mon activité de recherche se poursuivra certainement sur la thématique qui me tient le plus à cœur, c'est-à-dire l'information portée par une onde qui interagit avec l'environnement, et plus particulièrement avec l'environnement marin. Mon point de vue spécifique est de chercher dans la modélisation physique déterministe ou stochastique les modèles les plus pertinents qui permettent de mettre en évidence le plus efficacement possible cette information. Jusqu'à présent, j'ai pu mener à bien des études sur des axes de recherches qui m'intéressaient particulièrement. Des collaborations m'ont permis de mettre en œuvre des projets de thèse que j'avais préparé et qui correspondaient à la recherche que je voulais développer. Néanmoins, malgré la bienveillance des collègues qui m'ont aidé dans cette voie, le développement de mon activité de recherche connaît actuellement deux limites fondamentales. La première est que mon impossibilité de diriger des thèses me pose des difficultés pour construire des projets ambitieux notamment internationaux avec des chercheurs qui reconnaissent pourtant mes compétences, et qui me sollicitent régulièrement pour établir avec eux des partenariats. La seconde limite majeure est qu'une collaboration, pour un projet de thèse par exemple, nécessite un minimum de consensus quant aux objectifs, aux ambitions et aux approches méthodologiques, voire même à la compréhension du sujet. Dès lors que l'on veut traiter un sujet pointu scientifiquement avec des approches mathématiquement sophistiquées, le passage obligé par une collaboration peut considérablement limiter la portée de la recherche que l'on mûrit depuis plusieurs années et que l'on souhaite voir aboutir. Ces deux limites expliquent à mon sens très clairement, à elles seules, la motivation qui me pousse à obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches. Cette habilitation serait pour moi un élément clé qui me permettrait de mener au mieux mon projet de recherche à quatre ans et au-delà. Ce projet au cœur de la thématique "onde, environnement, modélisation et information" s'articule autour de trois axes principaux.

**Modélisations des interactions ondes-surface** L'interaction entre une onde électromagnétique et une surface de mer en mouvement constitue un phénomène physique très complexe qui permet de transférer une information issue de l'état hydrodynamique du fluide à l'ensemble de l'information portée par le champ électromagnétique. Le choix du modèle physique qui décrit ce phénomène, permet de me mettre en évidence plus ou moins clairement une partie de cette information. Le premier point qui m'intéresse particulièrement, et qui est dans la continuité des recherches que je mène depuis plusieurs années, est l'interaction d'une onde et d'une vague déferlante. Je cherche à développer cette thématique, déjà abordée lors de la thèse Refzul Khairi, en favorisant une modélisation mathématique commune entre l'hydrodynamique et l'électromagnétisme. En collaboration avec le Pr. Yves-Marie Scolan pour la partie hydrodynamique, nous menons une réflexion pour décrire le champ électromagnétique diffusé par des méthodes désingularisées, méthodes qui donnent déjà d'excellents résultats pour calculer numériquement le déplacement et la déformation des vagues déferlantes 2D dans le cadre de la mécanique des fluides (voir thèse la Refzul Khairi). L'idée est de traduire le champ électromagnétique dans ce formalisme pour établir un lien entre les singularités du champ électromagnétique et celles du champ de potentiel fluide. L'information étant portée par ces singularités, ces dernières devraient constituer une approche fructueuse pour mettre en évidence le lien entre le fluide et le champ électromagnétique. Le travail théorique à mener reste en grand partie ouvert, surtout si l'on considère une vague en dimension 3. Des travaux préliminaires ont déjà été menés en ce sens et les perspectives s'avèrent très encourageantes. Par ailleurs, des financements vont bientôt être demandés, notamment auprès de l'ONR (Office of Naval

Research), pour soutenir ce projet.

L'approche désingularisée s'appuie sur une vision déterministe du phénomène. L'approche stochastique me tient également très à cœur. Les travaux menés dans le cadre de la thèse de Clément Roussel ont montré la pertinence de nos modèles d'équations différentielles stochastiques non-linéaires pour la télédétection dans un contexte maritime. Un gros travail sur l'identification des paramètres du modèle à partir de mesures réelles a été réalisé. Ce modèle stochastique permet de calculer les probabilités de transition quand on observe les champs électromagnétiques diffractés par la mer à un instant  $t$  et à un instant  $t + \Delta t$ . Ce travail devrait donner lieu à des développements intéressants pour construire une imagerie ROS (Radar à Ouverture Synthétique) explicitement stochastique. Cette nouvelle imagerie ne serait plus uniquement dans le plan mais nécessiterait d'ajouter une troisième dimension qui décrirait la distribution de probabilité pour chaque pixel. Cette perspective ouvrirait sans doute des algorithmes intéressants en terme d'algorithme de traitement de l'information ou de théorie de la décision.

Je reste également convaincu que le travail sur la modélisation théorique doit se poursuivre. Plus précisément, la présence d'une cible induit que l'évolution temporelle du champ électromagnétique diffusé par une surface de mer correspond à un phénomène aléatoire qui évoluerait dans un espace non-euclidien, c'est à dire un espace courbe muni d'une métrique dépendant de la nature de la cible. La description géométrique de cet espace et le lien qui existe avec la nature de la cible sont, à mon sens, des questions importantes à traiter. Sur ce dernier point, je souhaite avoir la liberté de guider les étudiants sur cette thématique délicate. Dès que cela sera possible, je proposerai une thèse, voire deux, sur ce sujet avec le soutien de la DGA qui m'a déjà sollicité sur ce projet et proposé un financement.

**Théorie quantique de l'information** En 2008, j'ai été frappé par un article de Lloyd qui montrait qu'un couple de deux photons intriqués dont l'un était envoyé sur une cible à détecter permettait d'obtenir une information bien plus riche et un rapport signal à bruit considérablement plus élevé qu'un photon classique et ceci même en tenant compte de la perte de cohérence. Ce phénomène est appelé l'illumination quantique. A cette époque, j'avais jugé que cette présentation théorique ne concernait que l'optique et que le milieu de propagation ne jouait qu'un rôle mineur. Je n'avais donc pas intégré cette problématique à mes domaines de recherche directs. A partir de 2015, une série d'articles m'ont montré que l'on pouvait aussi considérer des photons micro-ondes, soit par cavité résonnante couplée à un photon optique, soit par effet Josephson. Par ailleurs, dès lors qu'il s'agit de photons micro-onde, le milieu joue un rôle majeur sur l'information de Van Neumann (version quantique de celle de Shannon) véhiculée par les photons. J'ai alors décidé qu'il s'agissait d'un axe de recherche important que je devais mener. J'ai préparé et lancé une thèse que le Pr. Ali Khenchaf a accepté d'encadrer. Cette thèse qui a commencé en octobre 2019 cherche à développer les liens entre l'effet d'illumination quantique et les potentialités d'un radar quantique. Cette thématique de recherche se poursuit en échangeant régulièrement avec plusieurs laboratoires du domaine quantique dont notamment le CEA (équipe IRAMIS) ou le Laboratoire Kastler Brossel, et encore avec des industriels comme Dassault. Par ailleurs, un autre projet sur ce thème, en relation avec l'université de Toulouse et l'Institut Polytechnique de Grenoble, est en cours de montage. L'objectif est le développement de systèmes de communications quantiques. Ma contribution dans ce projet se portera sur l'influence du milieu de propagation dans ces systèmes, en particulier l'influence du milieu maritime. Le projet inclue le financement d'une thèse portant sur ce point. Dans les prochaines années, je compte donc consacrer une part importante de mon activité de recherche sur le lien entre l'information et la propagation quantique dans différents milieux, et



en premier lieu dans les milieux maritimes.

**Modélisation des canaux de télécommunication** De part ma participation à l'UIT (Union Internationale des Télécommunication), je suis de plus en plus amené à m'impliquer dans des projets de télécommunication, toujours en conservant le point de vue physique de la propagation. Par exemple, le projet LINASAAF, soutenu par la DGA où il s'agit de modéliser les télécommunications et les liaisons radar entre une station au sol et des systèmes aéronautiques (drones par exemple), a commencé en février 2019 pour une période de 2 ans en collaboration avec Viet-Dung Nguyen et Ali Mansour. Un nouveau projet SYDACICO, débutant en 2021 et se terminant en 2023, va chercher à développer les résultats très intéressants déjà obtenus lors du projet LINASAAF.

En conclusion, mon projet de recherche dans les prochaines années consistera à développer une activité de recherche dans un périmètre scientifique incluant l'information, la télédétection, la physique de l'interaction onde-environnement, la modélisation des canaux de propagation et l'influence de la propagation sur les systèmes quantiques de type radar ou de télécommunication. Naturellement, le milieu maritime avec toute sa richesse et sa diversité constituera mon domaine d'application privilégié. Enfin, il est à souligner que l'intégralité des axes de recherche auxquels je souhaite contribuer sont en parfaite cohérence avec les thématiques portées par le pôle SyPH et l'équipe de recherche PIM du Lab-STICC dont je fais partie.

Deuxième partie

# Synthèse d'une sélection de travaux



---

# Introduction générale

---

Présenter une sélection de ses travaux de recherche, surtout sous forme synthétique, c'est inévitablement s'interdire l'exhaustivité et donc nécessairement éluder un certain nombre de contributions. Il faut donc faire des choix. Dans ce document, j'ai pris le parti de ne pas évoquer des travaux exploratoires qui n'ont pas donné lieu à publication suffisamment notable ou qui sont restés à l'état de pistes de recherche pour l'avenir. J'ai également évité de présenter beaucoup de mes recherches développées dans un cadre contractuel qui pourtant, certaines années, ont constitué une partie majeure de mon activité. J'ai, au contraire, privilégié les activités de recherche qui se sont inscrites sur une échelle de temps long. Cela explique sans doute pourquoi j'ai souvent fait référence aux travaux de thèse que j'ai encadrés et qui ont concrétisé beaucoup de mes contributions.

La synthèse proposée ici s'articule autour de six chapitres distincts. Il est néanmoins à noter que tous ces chapitres n'ont pas, à mon sens, le même statut. Les chapitres 3 et 4 pourraient être qualifiés d'historiques, dans le sens où ils décrivent des activités de recherche que je n'ai pas poursuivies depuis mon arrivée à l'ENSTA Bretagne en 2001. Le premier chapitre traite de la recherche menée au cours de mon doctorat en acoustique sous-marine, au LAUE au Havre. En réalité, il revêt un caractère théorique qui se généralise très bien à toute la physique ondulatoire et laisse entrevoir des liens avec certains développements mathématiques. Le deuxième chapitre marque un changement complet d'univers puisqu'il présente mes activités, durant trois ans, dans un centre de recherche en neurosciences à Rouffach en Alsace. L'objet était alors de s'intéresser aux signaux électromagnétiques émis par le cerveau. Même, si je n'ai pas poursuivi l'étude de ces deux domaines de recherche, ils sont importants dans la mesure où ils ont joué un rôle extrêmement formateur pour mes compétences scientifiques en physique des ondes et en électromagnétisme.

Les chapitres 5, 6 et 7 forment un triptyque qui décrit l'axe principal de ma recherche menée depuis mon arrivée à l'ENSTA Bretagne, c'est à dire l'interaction des ondes avec les environnements naturels et plus spécifiquement les environnements maritimes, le plus souvent pour un objectif de télédétection. Chacun de ces chapitres considère un point de vue spécifique sur ce domaine d'étude. Le premier des trois considère un certain nombre de méthodologies applicables dès lors que l'environnement est assimilable à un ensemble de diffuseurs statiques : des surfaces rugueuses pour les surfaces de mer et des pics de diffraction pour les milieux à forts reliefs. Le chapitre 6 se place dans le contexte où la déformation déterministe du milieu, typiquement des vagues en mouvement, est la source de la dynamique du champ électromagnétique diffusé. Ce chapitre cherche aussi à établir des ponts avec la dynamique des vagues et donc avec la mécanique de fluides qui décrit ces mouvements. Le troisième chapitre de cet ensemble reprend la notion d'évolution dynamique du milieu ambiant mais la connaissance déterministe est ici perdue au profit d'une description stochastique de ce milieu.

Le dernier chapitre de cette sélection de travaux joue un rôle un peu à part. Dans une première partie, il décrit la théorie de Shannon et son application à un problème d'identification électromagnétique. Cette thématique est en réalité transverse car elle s'avère présente dans la plupart de

mes activités de recherche depuis de nombreuses années. En revanche, la seconde partie qui aborde cette thématique dans le cadre de la mécanique quantique, présente une démarche et des résultats obtenus beaucoup plus récents qui ne bénéficient pas d'un grand recul. Cette dernière partie décrit plutôt une activité de recherche en cours.

## Chapitre 3

---

# Ondes cylindriques et interface

---

Ce chapitre correspond au travail de recherche effectué lors de mon doctorat au sein du LAUE. Après une introduction générale sur les concepts fondamentaux comme la méthode des images, la théorie modale ou la notion de fonction de Green, on pose le sujet de la thèse. Il s'agit d'un problème ouvert qui a débouché sur une problématique scientifique inattendue. Cette problématique ouvre en réalité la porte à un domaine d'étude beaucoup plus vaste qui dépasse largement le cadre de ce travail de thèse. En tentant d'apporter une solution pragmatique, on montre que les résultats obtenus sont cohérents avec d'autres approches, notamment avec la théorie de rayon. Le contexte général au LAUE portait sur l'acoustique sous-marine mais concrètement toute la modélisation proposée s'adresse à la physique des ondes dans toute sa diversité.

3.1	Une expérience de physique bien connue . . . . .	38
3.2	Passage à la diffusion par un cylindre . . . . .	40
3.2.1	Matrice de transition . . . . .	40
3.2.2	Exemple du tube élastique . . . . .	42
3.2.3	Application numérique . . . . .	46
3.3	Méthode des images et diffusion par un cylindre . . . . .	48
3.4	Un problème ouvert . . . . .	49
3.5	La méthode des images généralisée . . . . .	49
3.5.1	Contribution élémentaire de l'interface plane . . . . .	50
3.5.2	Diffusion par le cylindre d'une onde cylindrique venant du point symétrique . . . . .	52
3.5.3	Interactions mutuelles . . . . .	53
3.6	Utilisation des séries divergentes . . . . .	55
3.6.1	Redéfinition des sommes partielles . . . . .	55
3.6.2	Méthodes plus heuristiques . . . . .	58
3.6.3	Que penser des séries divergentes ? . . . . .	58
3.7	Retour à la physique . . . . .	59
3.8	Troncature . . . . .	61
3.8.1	Analyse du problème de divergence . . . . .	61
3.8.2	Détermination de l'ordre de troncature . . . . .	63
3.9	Validation par la théorie de rayon . . . . .	68
3.9.1	Modèle harmonique . . . . .	69
3.9.2	Modèle temporel . . . . .	70

3.10 Simulation numérique . . . . .	72
3.11 Quelques compléments . . . . .	74
3.12 Conclusion . . . . .	74

### 3.1 Une expérience de physique bien connue

L'idée de la méthode des images est extrêmement ancienne et correspond assez naturellement à l'expérience courante de notre propre perception face à une surface réfléchissante. On retrouve déjà dans les traités d'optique de Ptolémée (100-168) [1] ou d'Alhazen (Ibn Al-Haytham, 965-1040) [2, 3] la description des lois de la réflexion sur une surface plane ou courbe, et la méthode des images y est présente au moins sous sa forme la plus simple. La méthode des images s'illustre fréquemment dans les manuels de vulgarisation de sciences physiques par l'expérience des deux bougies placées de part et d'autre d'une plaque de verre semi-réfléchissante, voir la figure 3.1.



Figure 3.1 – Deux bougies de part et d'autre d'une plaque de verre semi-réfléchissante.

Les deux bougies sont initialement allumées et symétriques l'une de l'autre, puis on en éteint une. Pourtant, en regardant au travers de la plaque, on a l'impression que la bougie éteinte est restée allumée. En optique, pour un observateur placé du même côté que la source originale, tout semble se passer comme si l'on pouvait remplacer l'effet miroir par une autre source symétrique (appelée source virtuelle). Voici en quelques mots l'idée fondamentale de la méthode des images qui est devenue un concept tellement commun à chacun d'entre nous dès lors que l'on se place devant un miroir.

Ce principe n'est bien sûr pas restreint au domaine de l'optique mais se généralise très bien à toute la physique linéaire. Par exemple, en acoustique, un point source isolé, monochromatique de pulsation  $\omega$  et de puissance normalisée se formalise mathématiquement par l'équation aux dérivées

partielles de Helmholtz :

$$(\Delta + k^2) P(\mathbf{r}, \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.1)$$

à laquelle on ajoutera des conditions de rayonnement à l'infini de Sommerfeld (rayonnement en espace libre) [5, 4] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \right] = 0 \quad (3.2)$$

$\delta$  est la distribution de Dirac,  $k$  est  $P$  est la pression acoustique (on gardera dans ce chapitre la convention temporelle  $P(\mathbf{r}, \omega, t) = P(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$ ).  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  sont respectivement la position de l'observateur et de la source. En dimension deux,  $\mathbf{r} = (r, \theta)$  (resp.  $\mathbf{r}' = (r', \theta')$ ) et la solution du problème s'écrit :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (3.3)$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0 [6]. La fonction  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est ce que l'on appelle la fonction de Green en espace libre. Considérons maintenant que cette source ponctuelle se situe au dessus d'une surface parfaitement rigide (cf figure 3.2(a)), c'est à dire où la célérité acoustique est nulle. Il est aisé de démontrer que cela correspond à une maximum de pression acoustique et à un coefficient de réflexion pour une onde plane de 1. Alors, pour un observateur situé dans le même demi-plan que la source, cette configuration est totalement équivalente à la présence de deux sources ponctuelles, l'une située comme dans le cas précédent en  $\mathbf{r}'$  et l'autre identique à la première mais située en  $\mathbf{r}'_s$ , le point symétrique de  $\mathbf{r}'$  par rapport à la surface rigide. Pour cette seconde source, on parle alors de source virtuelle (cf figure 3.2(b)). Le simple fait de considérer l'équivalence entre ces deux configurations permet, par symétrie, de déduire immédiatement la solution du problème :

$$G_{\text{demi-plan rigide}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s\|) \quad (3.4)$$

La même démarche peut être appliquée dans le cas d'une interface plane molle, pour laquelle la pression acoustique s'annule et dont le coefficient de réflexion pour une onde plane est de  $-1$ . La méthode des images cherchera alors à établir une configuration équivalente qui ne sera plus une symétrie mais une anti-symétrie. On considère simplement dans cette situation que la source virtuelle n'est plus identique à la source située en  $\mathbf{r}'$ , mais est opposée. La solution du problème s'écrit :

$$G_{\text{demi-plan mou}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s\|) \quad (3.5)$$

Les interfaces rigides et molles sont appelées des interfaces impénétrables et elles constituent le contexte idéal d'application de la méthode des images. On notera aussi que la méthode des images ne se réduit absolument pas à l'acoustique. La source ponctuelle utilisée ici peut très bien être un champ électrique perpendiculaire au plan et l'interface une surface parfaitement conductrice, qui est équivalente à une interface molle en acoustique. Le formalisme serait strictement identique et les développements mathématiques pourraient être repris sans changer une virgule. En réalité la méthode des image s'applique dès lors que nous nous plaçons dans un formalisme de physique linéaire et en particulier avec des conditions aux frontières de type Dirichlet ou de Neumann homogènes (interface rigide ou molle).



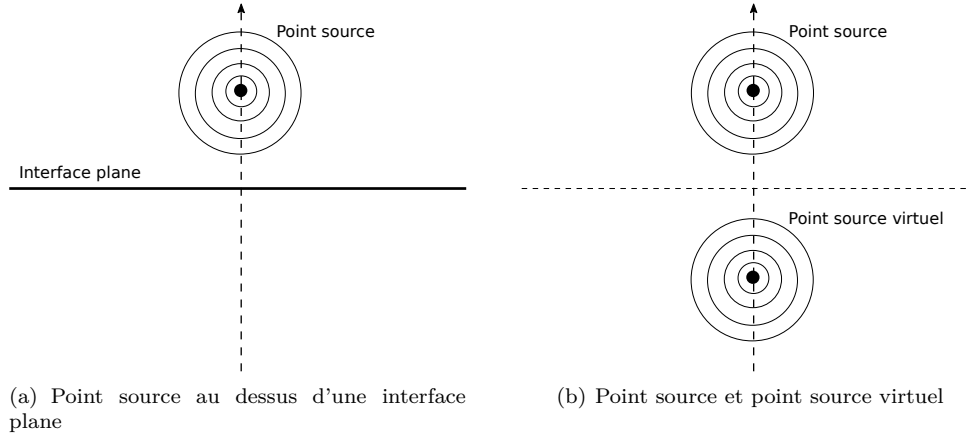


Figure 3.2 – Deux configurations équivalentes dans le cas d’une interface plane parfaitement réfléchissante pour un observateur situé au dessus de l’interface.

## 3.2 Passage à la diffusion par un cylindre

Pour traiter de la diffusion d’une onde par un cylindre, nous privilégions le formalisme modal. D’un point de vue général, la théorie des modes consiste, en physique linéaire, à modéliser les phénomènes par le biais des fonctions propres de l’opérateur différentiel, l’opérateur de d’Alembert ou de Helmholtz dans le cas des phénomènes ondulatoires. Sous certaines conditions aux frontières ou en choisissant un système de coordonnées particulier, il est possible de démontrer, en utilisant le théorème de Sturm-Liouville [7, 9, 8], que ces fonctions propres constituent une base fonctionnelle parfaitement adaptée à la description physique du problème. En réalité, les théories modales découlent directement d’un cadre théorique beaucoup plus vaste qui est celui de la théorie spectrale et de la théorie des opérateurs [10, 11]. Cette vision plus large permet par exemple d’établir des liens entre les formalismes de la physique classique et ceux de la physique quantique [12].

### 3.2.1 Matrice de transition

Dans le contexte de la diffusion d’une onde par un cylindre (voir figure 3.3), en régime harmonique et en coordonnées cylindriques, les fonctions propres de l’opérateur de Helmholtz sont :

$$J_n(kr) e^{in\theta} \quad Y_n(kr) e^{in\theta} \quad (3.6)$$

où  $J_n(x)$  est la fonction de Bessel d’ordre  $n$  et  $Y_n(x)$  est la fonction de Neumann d’ordre  $n$  [6]. L’ensemble de ces fonctions constituent une base fonctionnelle permettant de décrire l’intégralité des phénomènes ondulatoires harmoniques dans le plan. Dans ce cadre, une onde quelconque s’écrira sous la forme :

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n J_n(kr) e^{in\theta} + b_n Y_n(kr) e^{in\theta} \quad (3.7)$$

On notera que les fonction de Neumann présente une singularité en  $r = 0$ . Or une onde incidente, générée par des sources externe, n’a aucune raison de présenter une telle singularité. On déduit en

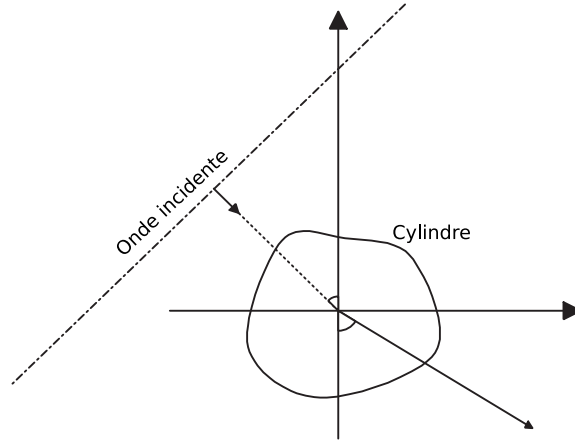


Figure 3.3 – Géométrie d'un cylindre de section quelconque soumis à une onde incidente.

réalité qu'une telle onde incidente peut s'écrire en toute généralité :

$$p_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n J_n(kr) e^{in\theta} \quad (3.8)$$

Par exemple, une onde plane supposée normalisée  $p_{inc} = e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{x}} = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)}$ , où  $\mathbf{k}_{inc}$  est le vecteur d'onde,  $\mathbf{x}$  la position de l'observateur et  $\alpha$  la direction d'incidence, peut s'écrire :

$$p_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n(kr) e^{in\theta} \quad (3.9)$$

ce qui correspond à  $a_n = i^n e^{-in\alpha}$ . D'une manière générale, en posant que  $\mathbf{a}$  est le vecteur dont les coordonnées sont  $a_n$  et  $\psi^{(j)}$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\psi_n^{(j)} = J_n(kr) e^{in\theta}$ , une onde incidente sera sous la forme :

$$p_{inc} = \langle \mathbf{a}, \psi^{(j)} \rangle \quad (3.10)$$

où  $\langle , \rangle$  est le produit scalaire canonique. La ressemblance avec le formalisme de Dirac en physique quantique n'est clairement pas fortuit et découle directement du formalisme mathématique général de la théorie spectrale.

Par ailleurs, le choix de la base fonctionnelle n'est évidemment pas unique. Par exemple :

$$H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta} \quad (3.11)$$

où  $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$  et  $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$  sont respectivement la fonction de Hankel de première espèce d'ordre  $n$  et la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre  $n$ , constitue une base fonctionnelle parfaitement équivalente à la précédente et une onde quelconque peut donc aussi se mettre sous la forme :

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} + d_n \cdot H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta} \quad (3.12)$$

Il est intéressant d'utiliser cette forme pour le champ diffusé par le cylindre puisque, en convention  $P(\mathbf{r}, \omega, t) = P(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$ , les fonctions  $H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$  correspondent à des ondes cylindriques qui s'éloignent du cylindre alors que les fonctions  $H_n^{(2)}(kr) e^{in\theta}$  correspondent à des ondes cylindriques qui, venant de l'infini, convergent vers l'axe du cylindre (c'est l'inverse en convention temporelle  $P(\mathbf{r}, \omega, t) = P(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}$ ). Ainsi, le champ diffusé par le cylindre s'écrira en toute généralité :

$$p_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad (3.13)$$

Si on pose que  $\mathbf{c}$  est le vecteur dont les coordonnées sont  $c_n$  et  $\boldsymbol{\psi}$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\psi_n = H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$ , le champ diffusé aura la forme synthétique :

$$p_{dif} = \langle \mathbf{c}, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad (3.14)$$

Les phénomènes ondulatoires se placent dans le cadre de la physique linéaire et l'onde diffusée doit dépendre linéairement de l'onde incidente. Il existe donc un opérateur linéaire  $\mathbf{T}$  reliant les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{c}$  :

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{a} \quad (3.15)$$

ou :

$$p_{dif} = \langle \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{a}, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad (3.16)$$

ou encore :

$$p_{dif} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\psi} \rangle \quad (3.17)$$

avec  $\mathbf{T}^*$  l'adjoint de l'opérateur  $\mathbf{T}$ . Ce dernier est l'opérateur d'un espace vectoriel de Hilbert (dimension infinie), néanmoins il est abusivement appelé matrice de transition. Cet opérateur décrit fidèlement l'interaction de l'onde avec le cylindre. Par exemple, pour un cylindre de section circulaire,  $\mathbf{T}$  devient un opérateur diagonal et si de plus il s'agit d'un cylindre mou de rayon  $r_0$ , nous avons que  $T_{nn} = -J_n(kr_0)/H_n^{(1)}(kr_0)$  et  $T_{nm} = 0$  si  $n \neq m$ . Un exemple plus intéressant qui fait apparaître des phénomènes de résonance, est celui du tube élastique.

### 3.2.2 Exemple du tube élastique

Un tube métallique est immergé dans un premier milieu fluide caractérisé par une densité  $\rho_1$  et une célérité  $c_1$ . Le deuxième milieu compose le corps du tube et est constitué par un matériau élastique. La densité est notée  $\rho_2$ , la vitesse de l'onde longitudinale  $c_L$  et la vitesse de l'onde transversale  $c_T$ . Le troisième milieu, interne au tube, est un fluide de densité  $\rho_3$  et de célérité  $c_3$ . On note  $a$  et  $b$  la valeur du rayon, respectivement externe et interne, comme représenté sur la figure 3.4.

#### L'onde dans le fluide externe

Afin de déterminer l'opérateur  $\mathbf{T}$ , nous chercherons à déterminer la diffusion par le cylindre quand l'onde incidente est choisie égale à l'onde élémentaire :

$$\mathbf{p}_{inc} = J_{n_0}(k_1 r) e^{in_0 \theta} = \Psi_{n_0}^{(j)}, \quad (3.18)$$

où  $k_1$  vaut  $\omega/c_1$ .

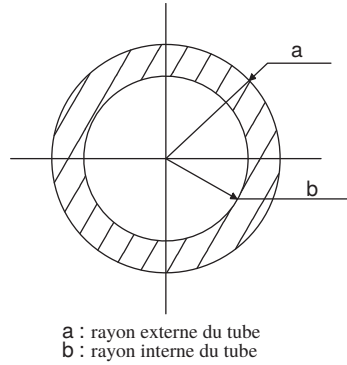


Figure 3.4 – Vue en coupe du tube.

Le champ de pression total  $\mathbf{p}_1$  dans le fluide externe sera donc :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif} = J_{n_0}(k_1 r) e^{in_0 \theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n H_n^1(k_1 r) e^{in\theta}, \quad (3.19)$$

avec  $\forall n, b_n \in \mathbb{C}$ .

Si l'expression 3.19 nous donne la forme générale du champ de pression, l'inconnue  $b_n$  restera à déterminer. Les conditions physiques imposées aux limites permettent de constituer un système Cramerien et d'en déduire les inconnues du problème. Certaines conditions aux limites portant sur le déplacement, il est nécessaire d'exprimer le déplacement relatif  $\mathbf{u}_1$  des particules causé par la surpression  $\mathbf{p}_1$ .

Dans un fluide, la pression  $\mathbf{p}_1$  peut s'exprimer à partir d'un potentiel scalaire  $\Phi_1$  :

$$\mathbf{p}_1 = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Il est également possible d'établir la relation entre le déplacement relatif  $\mathbf{u}_1$  et l'onde de pression :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla(\Phi_1), \quad (3.21)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur différentiel gradient.

En particulier, le calcul du déplacement radial des particules du fluide externe donne, d'après les relations précédentes :

$$\mathbf{u}_{1,r} = \frac{k_1}{\rho_1 \omega^2} \{ J'_{n_0}(k_1 r) e^{in_0 \theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n H_n'^1(k_1 r) e^{in\theta} \}, \quad (3.22)$$

où le signe ' indique la dérivation par rapport à l'argument.

Dans le milieu solide et le fluide interne du tube, il faudra également déterminer le déplacement relatif radial pour exprimer de façon complète les conditions aux limites.

### L'onde dans le solide

Dans le milieu élastique solide, le déplacement  $\mathbf{u}_2$  dépend d'un potentiel scalaire  $\Phi_2$  correspondant au déplacement longitudinal et d'un potentiel vecteur  $\Gamma_2$  correspondant au déplacement transversal :

$$\mathbf{u}_2 = -\nabla(\Phi_2) + \nabla \wedge \Gamma_2, \quad (3.23)$$

où  $\nabla \wedge$  est l'opérateur différentiel rotationnel.

Le déplacement dans la direction  $Oz$  étant considéré nul par hypothèse, seule la composante axiale  $\Gamma_{2,z}$  est non nulle :

$$\Gamma_{2,r} = \Gamma_{2,\theta} = 0 \quad \text{avec} \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{2,r} \\ \Gamma_{2,\theta} \\ \Gamma_{2,z} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Les potentiels vérifient l'équation de Helmholtz et peuvent s'écrire d'une façon générale :

$$\Phi_2 = \frac{1}{\rho_2 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_n(k_L r) e^{in\theta} + d_n N_n(k_L r) e^{in\theta}, \quad (3.25a)$$

$$\Gamma_{2,z} = \frac{1}{\rho_2 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n J_n(k_T r) e^{in\theta} + f_n N_n(k_T r) e^{in\theta}, \quad (3.25b)$$

où  $k_L = \omega/c_L$ ,  $k_T = \omega/c_T$  et  $\forall n$ ,  $(c_n, d_n, e_n, f_n) \in \mathbb{C}^4$ .

### L'onde dans le fluide interne

Dans la cavité, la pression doit être continue en  $r = 0$  et doit donc s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathbf{p}_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n J_n(k_3 r) e^{in\theta}, \quad (3.26)$$

où  $k_3 = \omega/c_3$  et  $\forall n$ ,  $g_n \in \mathbb{C}$ .

Comme dans le cas du fluide externe, la pression est directement liée au déplacement  $\mathbf{u}_3$  dont la composante radiale peut être calculée :

$$\mathbf{u}_{3,r} = \frac{k_3}{\rho_3 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n J'_n(k_3 r) e^{in\theta}. \quad (3.27)$$

### Conditions de continuité aux interfaces

Afin d'expliciter les inconnues  $(b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n)$ , on utilise les trois conditions de continuité aux interfaces solide-liquide externe et interne, en  $r = a$  et en  $r = b$  :

1. La pression dans le fluide est égale à la composante normale des contraintes dans le solide.
2. Le déplacement radial dans le fluide est égal au déplacement radial dans le solide.
3. Les contraintes tangentielles sont nulles à la surface du solide.

Le tenseur des contraintes dans le solide pouvant s'exprimer à partir des potentiels vecteur et scalaire, on obtient un système d'équations. Il faut aussi noter que les conditions de continuité sont vérifiées quelque soit  $\theta$  et qu'il est alors possible d'identifier les séries modales, qui sont des séries de Fourier en  $\theta$ , mode par mode.

On en déduit alors que  $\forall n \neq n_0$ ,  $b_n = c_n = d_n = e_n = f_n = 0$  et que, pour  $n = n_0$ , les conditions de continuité se résument au système linéaire 6x6 suivant :

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} b_{n_0} \\ c_{n_0} \\ d_{n_0} \\ e_{n_0} \\ f_{n_0} \\ g_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_T^2 J_{n_0}(x_1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} J'_{n_0}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

où on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 a, & x_L &= k_L a, & x_T &= k_L a, \\ y_T &= k_T b, & y_L &= k_T b, & y_3 &= k_3 b. \end{aligned}$$

et où  $\mathbf{M}$  est définie par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_T^2 H_{n_0}^1(x_1) & (x_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(x_L) & (x_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0} & 2n_0(x_T J'_{n_0}(x_T) - J_{n_0}(x_T)) & 2n_0(x_T N'_{n_0}(x_T) - N_{n_0}(x_T)) & 0 \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 H_{n_0}^1(x_1) & -x_L J'_{n_0}(x_L) & -x_L N'_{n_0}(x_L) & x_T J_{n_0}(x_T) & x_T N_{n_0}(x_T) & 0 \\ 0 & 2n_0(x_L J'_{n_0}(x_L) - J_{n_0}(x_L)) & 2n_0(x_L N'_{n_0}(x_L) - N_{n_0}(x_L)) & (x_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(x_T) & (x_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0}(x_T) & 0 \\ 0 & (y_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(y_L) & (y_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0}(y_L) & 2n_0(y_T J'_{n_0}(y_T) - J_{n_0}(y_T)) & 2n_0(y_T N'_{n_0}(y_T) - N_{n_0}(y_T)) & y_T^2 J_{n_0}(y_3) \\ 0 & -y_L J'_{n_0}(y_L) & -y_L N'_{n_0}(y_L) & y_T J_{n_0}(y_T) & y_T N_{n_0}(y_T) & -\frac{\rho_2}{\rho_3} y_3 J'_{n_0}(y_3) \\ 0 & 2n_0(y_L J'_{n_0}(y_L) - J_{n_0}(y_L)) & 2n_0(y_L N'_{n_0}(y_L) - N_{n_0}(y_L)) & (y_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(y_T) & (y_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0}(y_T) & 0 \end{pmatrix}$$

La résolution d'un tel système linéaire se conduit par la méthode de Cramer, et ainsi le coefficient  $b_{n_0}$  est donné par la relation :

$$b_{n_0} = \frac{D_{n_0}^{(1)}}{D_{n_0}}. \quad (3.29)$$

$D_{n_0}$  est le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}$  et  $D_{n_0}^{(1)}$  le déterminant de  $\mathbf{M}$  dont on a remplacé la première colonne par le second membre de l'équation (3.28).

L'onde incidente est l'onde élémentaire  $\mathbf{p}_{inc} = \Psi_{n_0}^{(j)}$  et donc la liste des  $b_n$  représente la ligne  $n_0$  de l'opérateur  $\mathbf{T}$ . Tous ces calculs montrent en définitive que l'opérateur linéaire  $\mathbf{T}$  d'un tube élastique est un opérateur diagonal :

$$\forall i \neq j, T_{ij} = 0 \text{ et } T_{ii} = \frac{D_i^{(1)}}{D_i}. \quad (3.30)$$

Le caractère diagonal de l'opérateur  $\mathbf{T}$  est une originalité des tubes à section circulaire centrée. Enfin, on peut remarquer que la détermination de l'opérateur linéaire  $\mathbf{T}$  pour un tube élastique contenant du vide s'obtient en faisant tendre  $\rho_3$  vers 0. On retrouve que  $g_n$  est nul et l'équation (3.28) se réduit alors à un système 5x5 équivalent au précédent.

### 3.2.3 Application numérique

L'exemple numérique, qui servira de référence tout au long de cette étude, sera celui d'un tube élastique d'intérieur vide.

Les caractéristiques physiques sont en utilisant les notations précédemment établies :

$$a = 0,003572 \text{ m} , \quad \frac{b}{a} = 0,9 , \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 2790 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_L &= 6380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, & c_T &= 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les valeurs  $\rho_2$ ,  $c_L$  et  $c_T$  associées au tube, correspondent, ici, à de l'aluminium. Les valeurs  $\rho_1$  et  $c_1$  correspondent, elles, à un milieu sédimentaire identifié à un fluide parfait.

Ce tube est excité par une onde plane unitaire  $\mathbf{p}_{inc}$  sous un angle d'incidence  $\alpha = 0$ . D'après les notations définies dans ce chapitre, nous avons :

$$\mathbf{p}_{inc} = e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.33a)$$

$$= \langle \mathbf{a}, \Psi^{(j)} \rangle \quad (3.33b)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Psi_n^{(j)} , \quad (3.33c)$$

avec  $a_n = i^n$ .

Ainsi, d'après ce que nous avons vu précédemment, l'onde diffusée par le tube  $\mathbf{p}_{dif}$  s'exprime par :

$$\mathbf{p}_{dif} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{T} \cdot \Psi \rangle \quad (3.34a)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{np} \Psi_p , \quad (3.34b)$$

Dans le cas de notre tube, l'opérateur  $\mathbf{T}$  est diagonal et  $T_{ii} = b_i$ . D'où :

$$\mathbf{p}_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_n \Psi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n H_n^1(k_1 r) e^{in\theta} . \quad (3.35)$$

En rétrodiffusion,  $\theta = \pi$ , on a :

$$\mathbf{p}_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_n \Psi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n H_n^1(k_1 r) e^{in\pi} \quad (3.36a)$$

et

$$\mathbf{p}_{inc} = e^{-ik_1 \cdot r} . \quad (3.36b)$$

Pour  $k_1 r$  grand, le développement asymptotique des fonctions de Hankel [6] permet d'écrire :

$$\mathbf{p}_{dif} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(k_1 r - (2n+1)\frac{\pi}{4} + n\theta)} . \quad (3.37)$$

On normalise la pression diffusée par  $\sqrt{\frac{a}{2r}}$  ; puis on prend  $r = a$ , afin de rendre les expressions indépendantes de l'éloignement de l'observateur :

$$\mathbf{p}_{dif_{norm}} = \frac{2}{\sqrt{\pi k_1 a}} e^{i(k_1 a - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n e^{in\frac{\pi}{2}} \quad (3.38a)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi k_1 a}} e^{i(k_1 a - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n b_n . \quad (3.38b)$$

Le rapport  $\mathbf{p}_{dif_{norm}}/\mathbf{p}_{inc}$  s'appelle la fonction de forme  $f_{forme}$  du cylindre :

$$f_{forme} = \frac{2}{\sqrt{\pi k_1 a}} e^{i(2k_1 a - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n b_n . \quad (3.39)$$

Dans le cas présent, le module de cette fonction de forme est donné par la figure 3.5.

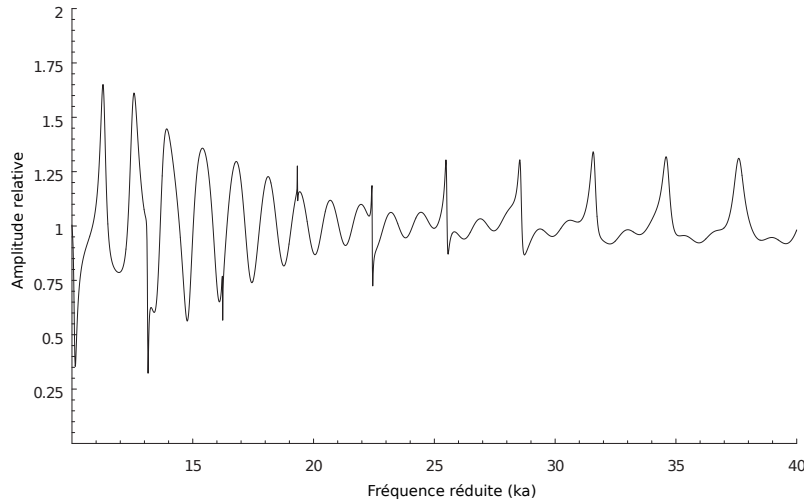


Figure 3.5 – Norme de la fonction de forme du tube.



### 3.3 Méthode des images et diffusion par un cylindre

Le formalisme du champ diffusé par un cylindre étant établi, il est possible de considérer celui-ci à proximité d'une interface plane, voir figure 3.6. Pour les cas où cette interface est impénétrable, la démarche est une nouvelle fois d'appliquer la méthodes des images, voir figure 3.7.

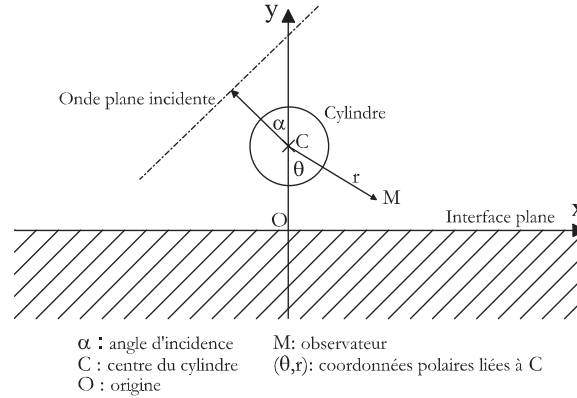


Figure 3.6 – Géométrie d'un cylindre de section quelconque soumis à une onde incidente.

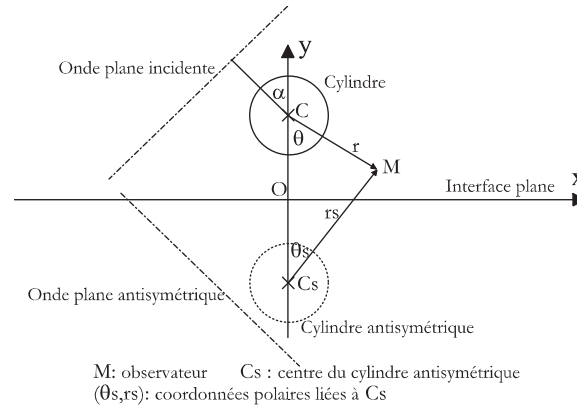


Figure 3.7 – Transformation par la méthode des images d'un cylindre de section quelconque soumis à une onde incidente.

Prenons par exemple le cas de l'interface molle où le champ s'annule sur cette interface. Si le cylindre diffuse une onde  $p$  de la forme :

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^1(kr) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \psi_n \quad (3.40)$$

alors le cylindre antisymétrique diffusera l'onde  $p_s$  :

$$p_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a_n H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s} \quad (3.41)$$

Conformément à la figure 3.7,  $(\theta, r)$  et  $(\theta_s, r_s)$  sont les coordonnées polaires respectivement associées au centre du cylindre  $C$  et à son symétrique par rapport à l'interface  $C_s$ .

Il est clair que pour un point quelconque de l'interface, les coordonnées polaires correspondantes seront telles que  $r_s = r$  et  $\theta_s = \theta$ . La pression diffusée par les deux cylindres sera donc, en ce point,  $p + p_s = 0$ . De même, la somme des pressions issues des deux ondes incidentes sera nulle en tout point de l'interface.

Le problème du cylindre proche de l'interface s'est transformé en une détermination du champ de pression diffusé par deux cylindres parallèles. L'intérêt de la procédure tient au fait que le calcul de la diffusion par deux cylindres parallèles est connu [14, 13, 15] (de même pour deux éléments sphériques en dimension trois [19, 18, 17, 16]) et ne soulève pas de difficultés majeures. D'un point de vue physique, l'onde plane antisymétrique s'interprète comme étant la réflexion de l'onde plane incidente sur l'interface à laquelle on attribue le coefficient de réflexion  $-1$ . La diffusion par le cylindre antisymétrique est elle la contribution de l'interface engendrée par la diffusion issue du cylindre réel.

### 3.4 Un problème ouvert

Mon travail de thèse s'inscrivait complètement dans cette problématique générale de la diffusion par un cylindre à proximité d'une interface plane dans le cadre de la théorie modale. Plus précisément, mon directeur de thèse Jean-Marc Conoir, directeur de recherche CNRS, m'avait proposé le problème ouvert suivant : que devient le formalisme précédemment décrit lorsque l'interface plane n'est plus impénétrable ?

L'intérêt physique s'avérait évident, notamment en acoustique sous-marine où les interfaces sont généralement de type fluide-fluide ou fluide-solide qui ne peuvent être assimilées à des surfaces impénétrables. Néanmoins, la pertinence de ramener la contribution de l'interface à celle d'un cylindre symétrique particulier n'était absolument pas établie dans le cas général.

Dans la mesure où aucune hypothèse restrictive n'est faite sur la nature de l'interface plane, seul le coefficient de réflexion  $R(\theta)$ , fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ , sera supposé connu. La diffusion par l'interface de l'onde plane incidente, à savoir l'onde plane réfléchie, sera parfaitement déterminée par la connaissance de ce coefficient de réflexion. La difficulté majeure consiste à déterminer la diffusion par l'interface des ondes cylindriques issues de la diffusion par le cylindre. Une onde issue du cylindre provoque une réaction de l'interface plane, qui engendre à son tour une diffusion par le cylindre et ainsi de suite. Il faut donc modéliser l'interaction globale entre le cylindre et le plan.

### 3.5 La méthode des images généralisée

Pour construire cette généralisation de la méthode des images, nous considérerons des interactions élémentaires puis, par linéarité, nous pouvons en déduire l'expression de champ global d'interaction mutuelle. Avant de développer cette approche, il faut considérer que le champ incident, onde plane générée par une source externe, peut se présenter selon deux configurations différentes.

Lorsque que l'angle d'arrivée  $\alpha$  est compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ , alors l'interface induira une onde plane réfléchie. Dans le cas contraire, il n'y aura pas de réflexion de l'onde plane. Nous pouvons ainsi considérer que le champ incident  $\mathbf{p}_{inc}$  se formalisera sous la forme :

$$\mathbf{p}_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n^{(\alpha)} J_n(kr) e^{in\theta} \quad (3.42)$$

avec

$$\xi_n^{(\alpha)} = \begin{cases} i^n [e^{-in\alpha} + R(\alpha) e^{ikd \cos \alpha} e^{-in(\pi-\alpha)}] & \text{si } |\alpha| < \pi/2 \\ i^n e^{-in\alpha} & \text{si } |\alpha| > \pi/2 \end{cases} \quad (3.43)$$

où  $d = 2OC$  est égal à la distance entre  $C_s$  et  $C$ . En utilisant les notations précédemment vues, ceci s'écrit sous une forme synthétique :

$$\mathbf{p}_{inc} = \langle \boldsymbol{\xi}^{(\alpha)}, \boldsymbol{\psi}^{(j)} \rangle \quad (3.44)$$

en posant que  $\boldsymbol{\xi}^{(\alpha)}$  est le vecteur dont les coordonnées sont  $\xi_n^{(\alpha)}$ .

### 3.5.1 Contribution élémentaire de l'interface plane

En toute généralité, le champ diffusé par le cylindre s'écrit sous la forme d'une série modale :

$$\mathbf{p}_c = \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Psi} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n T_n \Psi_n \quad (3.45)$$

La présence de l'opérateur  $\mathbf{T}$  marque simple le fait que l'onde émise par le cylindre est issue de la diffusion d'un champ extérieur et comme nous l'avons vu cet opérateur résume toute les caractéristiques physique du cylindre, voir [20]. Par ailleurs, à ce stade, le vecteur  $\boldsymbol{\xi}$  reste à être déterminé.

Si l'on souhaite modéliser la réaction de l'interface plane face au champ diffusé par le cylindre, il faut être en mesure de déterminer la réaction de cette interface plane soumise à un champ élémentaire  $\Psi_n$ . L'interface n'étant connue qu'au travers de son coefficient de réflexion  $R(\theta)$ , l'idée clé est de décomposer cette onde cylindrique élémentaire sous la forme d'un spectre d'ondes planes. En effet, la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$  peut s'écrire sous la forme [21] :

$$H_n^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{W_0} e^{ikr \cos \omega} e^{in(\omega-\pi/2)} d\omega \quad (3.46)$$

où  $W_0$  est un chemin d'intégration dans le plan complexe allant de  $W_0^s + i\infty$ , avec  $-\pi < W_0^s < 0$ , à  $W_0^f - i\infty$ , avec  $0 < W_0^f < +\pi$ . Selon Sommerfeld [22], en introduisant une nouvelle variable  $\theta_k$  définie par la relation

$$\omega = \theta_k - \theta \quad (3.47)$$

l'intégrale précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Psi_n = H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} = \frac{1}{\pi} \int_W e^{ik(x \sin \theta_k - (y-h) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k \quad (3.48)$$

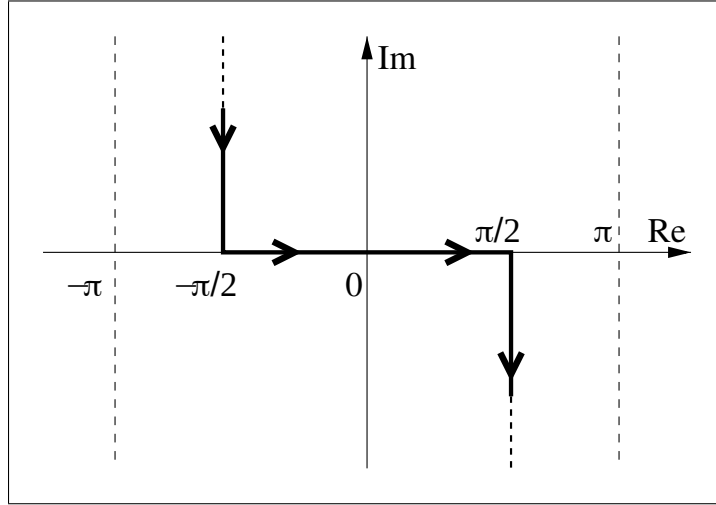


Figure 3.8 – Chemin d'intégration de Sommerfeld.

où  $W$  est le contour de Sommerfeld partant de  $-\pi/2 + i\infty$  et se terminant en  $\pi/2 - i\infty$  (voir la figure 3.8). D'un point de vue physique, la variable  $\theta_k$  joue le même rôle que l'angle d'incidence de l'onde plane vue dans l'équation (3.42).

La composante élémentaire  $\Psi_n$  ainsi décomposée sous la forme d'un spectre d'ondes planes, la réaction de l'interface  $\Psi_{R,n}$  soumise cette composante élémentaire s'écrira d'une façon formelle en utilisant le coefficient de réflexion  $R(\theta)$  :

$$\Psi_{R,n} = \frac{1}{\pi} \int_W R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+h) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k \quad (3.49)$$

Le problème avec ce formalisme est que le coefficient de réflexion  $R(\theta)$  n'est a priori défini que pour des angles  $\theta$  réels et que l'intégration s'effectue sur le plan complexe. Il est toujours possible de considérer l'expression fonctionnelle réelle de ce coefficient et de prolonger les fonctions dans le plan complexe. On s'aperçoit alors que cette généralisation fonctionnelle fait apparaître des singularités, notamment des points de branchement. Il faut donc prendre quelques précautions quant au chemin d'intégration utilisé dans l'intégrale, voir [25, 24, 23]. Enfin, si l'expression intégrale de  $\Psi_{R,n}$  permet une interprétation en termes de spectre complexe d'ondes planes, elle n'établit pas clairement le lien avec la théorie modale. Une idée est alors de décomposer le coefficient  $R(\theta)$ , qui est une fonction périodique sous la forme d'une série de Fourier et d'utiliser cette nouvelle expression pour le plongement dans le plan complexe. Ainsi, nous développons le coefficient  $R(\theta)$  en une série de Fourier :

$$R(\theta_k) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_q \cdot e^{iq\theta_k} \quad (3.50)$$

Une fois cette série de Fourier établie et placée dans l'équation (3.49), nous obtenons :

$$\Psi_{R,n} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_q \cdot i^q \cdot \left[ \frac{1}{\pi} \int_W e^{ik(x \sin \theta_k + (y+h) \cos \theta_k)} e^{i(n+q)(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k \right] \quad (3.51)$$

Alors, en utilisant l'expression

$$\Psi_n^{(s)} = H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s} = \frac{1}{\pi} \int_W e^{ik(x \sin \theta_k + (y+h) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k \quad (3.52)$$

d'une onde cylindrique élémentaire issue du point image  $C_s$ , nous avons :

$$\Psi_{R,n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{m-n} \cdot i^{m-n} \cdot \Psi_m^{(s)} \quad (3.53)$$

avec  $m = q + n$ . On notera qu'il s'agit d'une représentation formelle et que par exemple la problématique de la convergence de la série de Fourier n'est pas abordée ici. Néanmoins, l'avantage de ce formalisme est qu'il permet aisément de construire un opérateur de réflexion  $\mathbf{R}$  dont les composantes  $R_{mn}$  sont données par :

$$R_{mn} = i^{m-n} R_{m-n} \quad (3.54)$$

Pour plus de clarté, l'opérateur de réflexion  $\mathbf{R}$  peut se visualiser par :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \ddots & -iR_{-1} & -R_{-2} & iR_{-3} & \ddots \\ iR_1 & R_0 & -iR_{-1} & -R_{-2} & iR_{-3} \\ -R_2 & iR_1 & R_0 & -iR_{-1} & -R_{-2} \\ -iR_3 & -R_2 & iR_1 & R_0 & -iR_{-1} \\ \ddots & -iR_3 & -R_2 & iR_1 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Toujours en conservant notre approche formelle, en posant  $\Psi_{R,n}$  et  $\Psi_m^{(s)}$  les composantes des vecteurs  $\Psi_R$  and  $\Psi^{(s)}$ , l'équation (3.53) s'écrira algébriquement selon l'expression suivante :

$$\Psi_R = \mathbf{R} \cdot \Psi^{(s)} \quad (3.56)$$

Dans le cas d'interfaces rigides ou molles  $R(\theta_k) = \pm 1$  respectivement, et l'équation (3.56) se réduit à :

$$\Psi_R = \pm \Psi^{(s)} \quad (3.57)$$

ce qui est parfaitement cohérent avec la méthode classique des images.

### 3.5.2 Diffusion par le cylindre d'une onde cylindrique venant du point symétrique

Nous venons de décrire la contribution de l'interface plane soumise à une diffusion élémentaire venant du cylindre. Cette contribution a été mise sous la forme d'une cylindrique élémentaire émise par le point symétrique  $C_s$ . Maintenant, il s'agit de déterminer la diffusion par le cylindre d'une telle onde élémentaire. La première tâche est de décrire une onde cylindrique  $\Psi_n^{(s)}$  issue du point  $C_s$  dans le formalisme d'une onde incidente vue du point  $C$ . Ce problème peut se résoudre en appliquant le théorème de Graf [21] qui nous permet d'établir la relation suivante :

$$\Psi_n^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}^{(1)}(kd) \Psi_m^{(j)} \quad (3.58)$$

Une nouvelle fois, à partir de cette relation, nous allons chercher à construire un opérateur linéaire, appelé opérateur de Graf et noté  $\mathbf{G}$ , dont les composantes sont définie par :

$$G_{nm} = H_{m+n}^{(1)}(kd) \quad (3.59)$$

Ainsi, l'équation (3.58) prendra la forme algébrique suivante :

$$\Psi^{(s)} = \mathbf{G} \cdot \Psi^{(j)} \quad (3.60)$$

Cet opérateur linéaire de Graf  $\mathbf{G}$  prendra la forme :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \ddots & H_{-3}^{(1)}(kd) & H_{-2}^{(1)}(kd) & H_{-1}^{(1)}(kd) & \ddots \\ H_{-3}^{(1)}(kd) & H_{-2}^{(1)}(kd) & H_{-1}^{(1)}(kd) & H_0^{(1)}(kd) & H_1^{(1)}(kd) \\ H_{-2}^{(1)}(kd) & H_{-1}^{(1)}(kd) & H_0^{(1)}(kd) & H_1^{(1)}(kd) & H_2^{(1)}(kd) \\ H_{-1}^{(1)}(kd) & H_0^{(1)}(kd) & H_1^{(1)}(kd) & H_2^{(1)}(kd) & H_3^{(1)}(kd) \\ \ddots & H_1^{(1)}(kd) & H_2^{(1)}(kd) & H_3^{(1)}(kd) & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Finalement, il découle que les ondes cylindriques élémentaires  $\Psi_n^{(s)}$  issues du point  $C_s$  induisent des ondes cylindriques diffusées par le cylindre, notées  $\Psi_{S,n}^{(s)}$ , et que les équations (3.10,3.17,3.60) conduisent à la relation vectorielle :

$$\Psi_S^{(s)} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \cdot \Psi \quad (3.62)$$

où  $\Psi_S^{(s)}$  est le vecteur dont les composantes sont  $\Psi_{S,n}^{(s)}$ .

### 3.5.3 Interactions mutuelles

Après avoir établi les contributions élémentaires de l'interface plane et celles du cylindre, il est temps à présent de considérer les interactions mutuelles afin d'aboutir à une expression globale des champs diffusés.

Sans perte de généralité, les ondes cylindriques diffusées par le cylindre peuvent s'écrire :

$$\mathbf{p}_{cyl} = \langle \mathbf{A}, \Psi \rangle \quad (3.63)$$

où  $\mathbf{A}$  est un vecteur à déterminer. De la même façon, la contribution provenant de l'interface plane peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{p}_{int} = \langle \mathbf{B}, \Psi^{(s)} \rangle \quad (3.64)$$

où  $\mathbf{B}$  est un second vecteur à déterminer.

Le champ  $\mathbf{p}_{cyl}$  correspond à la diffusion par le cylindre des ondes provenant l'interface et du champ incident  $p_{inc}$ , cf. (3.44). En appliquant les opérateurs linéaires  $\mathbf{T}$  and  $\mathbf{G}$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$\langle \mathbf{A}, \Psi \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \cdot \Psi \rangle + \langle \xi^{(\alpha)}, \mathbf{T} \cdot \Psi \rangle \quad (3.65)$$

ou encore :

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{B} + \mathbf{T}^* \cdot \xi^{(\alpha)} \quad (3.66)$$

le signe \* indiquant l'adjoint de l'opérateur linéaire.

Parallèlement, champ acoustique  $\mathbf{p}_{int}$  correspond à la réaction de l'interface plane soumise aux ondes provenant du cylindre. Aussi, en utilisant l'opérateur linéaire  $\mathbf{R}$ , il vient que :

$$\langle \mathbf{B}, \Psi^{(s)} \rangle = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \cdot \Psi^{(s)} \rangle \quad (3.67)$$

ou autrement :

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{A} \quad (3.68)$$

En reprenant les équations (3.66,3.68), nous aboutissons à un système linéaire de deux vecteurs inconnus  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{T}}^* \cdot \bar{\mathbf{G}}^* \cdot \mathbf{B} + \bar{\mathbf{T}}^* \xi^{(\alpha)} \\ \mathbf{B} = \bar{\mathbf{R}}^* \cdot \mathbf{A} \end{cases} \quad (3.69)$$

La résolution de ce système nous donne que :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{D}}^*)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{T}}^* \cdot \xi^{(\alpha)} \\ \mathbf{B} = \bar{\mathbf{R}}^* \cdot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{D}}^*)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{T}}^* \cdot \xi^{(\alpha)} \end{cases} \quad (3.70)$$

où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité et  $\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}$ .

Ainsi, nous avons réussi à expliciter, dans le cadre de la théorie modale, une expression formelle du champ acoustique diffusé par le cylindre  $\mathbf{p}_{cyl}$  et celui de la réaction de l'interface plane  $\mathbf{p}_{int}$ . Finalement, le champ acoustique global  $\mathbf{p}_{glo}$  sera donné par la relation

$$\mathbf{p}_{glo} = \mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{cyl} + \mathbf{p}_{int} \quad (3.71a)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{glo} = & \langle \xi^{(\alpha)}, \Psi^{(j)} \rangle + \langle \xi^{(\alpha)}, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \Psi \rangle \\ & + \langle \xi^{(\alpha)}, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \Psi^{(s)} \rangle \end{aligned} \quad (3.71b)$$

Il est à souligner que l'expression du champ  $\mathbf{p}_{glo}$  peut s'interpréter comme le résultat d'une série de Debye généralisée correspondant à une somme infinie de toute les interactions élémentaires entre le cylindre et l'interface [24].

Cette solution formelle s'interprète comme une généralisation de la méthode des images standard. En effet, lorsque l'interface devient rigide ou molle, l'opérateur de réflexion  $\mathbf{R}$  se résume à  $\mathbf{R} = \pm \mathbf{I}$  (cf. equation (3.57)) et  $\mathbf{D} = \pm \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}$ . Dans ce cas, le champ acoustique global  $\mathbf{p}_{glo}$  s'écrit (cf. equation 3.71b) :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{glo} = & \langle \xi^{(\alpha)}, \Psi^{(j)} \rangle + \langle \xi^{(\alpha)}, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - (\pm \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}))^{-1} \cdot \Psi \rangle \\ & \pm \langle \xi^{(\alpha)}, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - (\pm \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}))^{-1} \cdot \Psi^{(s)} \rangle \end{aligned} \quad (3.72)$$

ce qui correspond exactement au résultat obtenu par l'application de la méthode des images standard [26]. Cette proposition de méthode des images généralisée a fait l'objet d'une publication dès 1998 [27]. La démarche a d'ailleurs été reprise notamment par Fawcett qui a cherché à l'appliquer en dimension trois [28].

En apparence, le travail réalisé semble mettre un point final à la modélisation théorique de la modélisation du couplage cylindre interface dans le domaine acoustique. Ce nouveau formalisme peut aussi être repris à l'identique dans le domaine électromagnétique. Il suffirait de considérer une onde électromagnétique incidente plane dont le champ est orienté perpendiculairement au plan.

En réalité, cette impression de point final n'est qu'illusoire. En effet, la solution globale (3.72) utilise la notation de Dirac ce qui correspond à une série infinie. Or, on constate rapidement que cette série est divergente. Pire, on constate que les termes même de cette série divergent, ce qui a priori soulève un fort scepticisme quant à l'utilité de l'expression (3.72).

## 3.6 Utilisation des séries divergentes

Une série infinie  $S$  peut s'écrire formellement par :

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad (3.73)$$

Néanmoins, cette série n'aura de sens en théorie classique qu'à partir du moment où nous sommes en mesure de définir les sommations partielles finies  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  et donner un sens à la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . On parle alors de série convergente. Dès lors qu'une série formelle ne rentre pas dans ce cadre, elle est qualifiée de divergente. Toujours formé, lors de nos études scientifiques scolaires et supérieures, à toujours respecter ce cadre de pensée et de n'accorder une valeur définissable qu'aux séries convergentes, la première tentation face à une série qui ne l'est pas est d'abandonner et de considérer cette voie comme sans issue. Pourtant après une recherche plus approfondie, on constate que d'autres regards sont possibles.

### 3.6.1 Redéfinition des sommes partielles

Lorsqu'une série est divergente, une démarche possible, dans certain cas, est de construire un équivalent des sommes partielles pour lequel la limite existe. Il faut simplement vérifier que ce processus donne le même résultat quand il s'agit d'une suite convergente.

#### Méthode de Cesàro

L'approche sans doute la plus connue de redéfinition des sommes partielles est la méthode de Cesàro. Elle consiste à définir une nouvelle suite  $C_n$  construite à partir des sommes partielles  $S_n$  en posant :

$$C_n = \frac{1}{n} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S_k \quad (3.74)$$

Il est très facile de montrer que pour une série  $S_n$  convergente, la suite  $C_n$  admettra aussi une limite et qu'elle sera identique à celle de  $S_n$ . En ce sens, il devient cohérent de regarder la limite d'une série par le prisme de la suite de Cesàro plutôt qu'au travers des sommes partielles. On constate que certaines suites divergentes admettent une limite au sens de Cesàro, par exemple la série dite de Grandi :

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (3.75)$$



Les sommes partielles  $S_n$  de cette série valent 1 quand  $n$  est pair et sont nulles pour  $n$  impair. On a alors :

$$C_n = \frac{1}{n} (1 + 0 + 1 + 0 \cdots) = \frac{1}{n} (n/2) = 1/2 \quad (3.76)$$

Associer la valeur 1/2 à cette série ne semble pas si surprenant pour une série alternée oscillant autour de cette valeur.

### Méthode de Abel

Une autre technique, cohérente avec les séries convergentes, permettant de régulariser une suite divergente est celle du mathématicien Abel. Elle consiste une fonction  $f(x)$  définie par :

$$f(x) = \sum a_k x^k \quad (3.77)$$

et de voir dans quelle mesure cette fonction est définie et la limite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe.

Par exemple, considérons la série :

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \quad (3.78)$$

La fonction de Abel correspondante est :

$$f(x) = \sum (-1)^{k-1} kx^k = -x = \sum (-1)^{k-1} kx^k \quad (3.79)$$

La théorie des séries entières [29] nous permet dans ce cas d'identifier la dérivée d'un développement bien connu et de trouver que :

$$f(x) = -x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+x} \right) = \frac{x}{(1+x)^2} \quad (3.80)$$

La limite de cette fonction en 1 nous donne la valeur 1/4. Nous avons été ainsi capable d'associer une valeur finie à une série dont les termes eux-même sont divergents.

### Méthode de Borel

L'approche de Cesàro, vue précédemment, peut se généraliser définissant la suite :

$$Cg_n = \frac{p_0 S_0 + p_1 S_1 + \cdots + p_n S_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{k=0}^n p_k S_k}{\sum_{k=0}^n p_k} \quad (3.81)$$

Les termes  $p_k$  sont appelés suite de pondération. Dans le cas où  $p_k = 1$ , on retrouve le formalisme de Cesàro classique. Toutefois, si on fait ce choix, chaque terme  $S_n$  aura la même pondération et jouera le même rôle dans le calcul de la limite. L'idée de Borel [30] est au contraire de différencier les contributions et d'accorder d'autant plus de poids à  $S_n$  que  $n$  est grand. Il choisit  $p_k = \lambda^k/k!$  où  $\lambda$  sera un paramètre qui tendra vers l'infini. En remarquant que  $\sum \lambda^k/k! = e^\lambda$ , il pose :

$$S(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} S_k \quad (3.82)$$

En dérivant cette nouvelle fonction, on obtient :

$$S'(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (S_{k+1} - S_k) \quad (3.83)$$

En utilisant les termes  $a_k$  de la série, on a :

$$S'(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} a_{k+1} \quad (3.84)$$

On peut ainsi obtenir une expression de  $S(\lambda)$  qui ne fait plus intervenir les sommes partielles  $S_k$  :

$$S(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-\mu} \sum_{k=0}^n \frac{\mu^k}{k!} a_{k+1} d\mu \quad (3.85)$$

On constate qu'en prenant un  $\lambda$  infiniment grand, il devient possible de régulariser efficacement des séries divergentes et on démontre que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S(\lambda)$  est parfaitement cohérente avec la limite d'une convergente.

Par exemple, en appliquant la sommation de Borel à la série entière  $S_n = \sum_{k=0}^n z^k$ , on obtient la fonction  $\int_0^\infty e^{-\mu} e^{\mu z} \mu$  qui est définie pour  $Re z < 1$  et vaut  $1/(1-z)$ . On voit que le procédé de Borel permet d'obtenir un prolongement analytique à l'extérieur du disque de convergence d'une série entière.

### Régularisation par la fonction Zeta

Une série entière  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$  est convergente sur le disque  $|z| < 1$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ . On trouve classiquement que  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$  sur ce disque et la série diverge en dehors. A priori, il serait saugrenu de considérer par exemple  $S(2)$ . Cependant,  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  est une fonction complexe qui peut se prolonger analytiquement sur l'ouvert  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 1\}$ . Il devient alors extrêmement tentant d'associer à la série divergente  $S(2)$  la valeur finie  $f(2) = 1/(1-2) = -1$ .

En suivant exactement la même démarche, on considère que la série  $S_\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  est convergente sur le demi-plan  $Re s > 1$  de  $\mathbb{C}$ . Sur ce domaine de convergence, la série  $S_\zeta(s)$  est égale à une fonction  $\zeta(s)$ , appelée fonction Zeta de Riemann. Cette fonction Zeta est prolongeable analytique sur  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 1\}$  et s'écrit [31] :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \quad (3.86)$$

où  $\Gamma(s)$  est la fonction gamma.

Par exemple, en considérant le point  $s = -1$ , la quantité  $\zeta(-1)$  est parfaitement définie et vaut  $-1/12$ . Cela conduit à écrire :

$$S_\zeta(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (3.87)$$

Ce résultat choque l'intuition et semble totalement absurde. Pourtant par une autre technique de régularisation très différente, le mathématicien indien Ramanujan [32] retrouve aussi que  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$ .

On pourrait présenter encore de nombreuses autres techniques analytiques permettant de régulariser une série divergente et de lui affecter une valeur finie. On trouvera dans l'ouvrage de référence écrit par Hardy [33], la quasi totalité de celles développées jusque dans la première moitié du  $xx^e$  siècle.

### 3.6.2 Méthodes plus heuristiques

L'approche analytique n'est pas la seule pour aborder les séries divergentes. Considérons un point de vue où l'on manipule plus algébriquement ces séries. Par exemple en reprenant la série  $A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , on peut naïvement écrire :

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (3.88)$$

$$= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \quad (3.89)$$

$$= 1 - A \quad (3.90)$$

L'équation  $A = 1 - A$  conduit à  $A = 1/2$  ce qui correspond à la valeur obtenue par la méthode de Cesàro.

De même avec la série  $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ , il serait logique d'écrire :

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \quad (3.91)$$

$$= 1 - (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots) \quad (3.92)$$

$$= 1 - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots) - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \quad (3.93)$$

$$= 1 - B - A \quad (3.94)$$

ce qui conduit à  $B = 1/4$ , c'est à dire au même résultat que par l'approche de Abel.

Enfin, pour la série  $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ , on écrira :

$$S - B = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots) \quad (3.95)$$

$$= (4 + 8 + 12 + 16 + \dots) = 4S \quad (3.96)$$

Là encore on retrouve que  $S = -1/12$  comme dans les méthode de régularisation analytique.

Au vu des ces calculs élémentaires, on pourrait penser que la manipulation des séries divergentes est extrêmement simple et qu'il suffit pour cela d'utiliser des manipulations arithmétiques créatives. La réalité est bien différente, pour s'en convaincre, il suffit de considérer une série alternée convergente mais non-absolument convergente. Les séries extraites des valeurs positives et négatives sont alors des séries divergentes. Un résultat classique, vue habituellement en premier cycle d'étude supérieur en mathématiques, est le théorème de réarrangement de Riemann. Ce théorème affirme qu'en changeant l'ordre de cette série, il est possible de la faire tendre vers une limite quelconque. Ceci montre à quel point la manipulation inconsidérée des séries divergentes peut être dangereuse.

### 3.6.3 Que penser des séries divergentes ?

Finalement, établir une certaine crédibilité aux séries divergentes est bien délicat. Dans son Cours d'Analyse algébrique de L'École royale polytechnique (1821), Cauchy prend position : "Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront un peu dures, par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme".

Mais celui qui dénonça le plus clairement le manque de rigueur dans la théorie des séries fut Niels Abel : "Les séries divergentes sont en bloc une invention diabolique, et c'est une honte que l'on ose fonder là-dessus une démonstration quelconque. On peut, avec leur secours, établir tout ce qu'on voudra, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer quelque chose de plus affreux que de débiter

$$0 = 1 - 2n + 3n - 4n + \dots$$

$n$  étant un nombre entier positif? Tout cela m'a fait lever les yeux avec une vraie consternation; car, si l'on excepte les cas les plus simples, tels que les séries géométriques, il n'existe, dans toutes les mathématiques, presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée rigoureusement; en d'autres termes, ce qu'il y a de plus important en mathématiques ne repose sur aucun fondement".

Néanmoins, des mathématiciens comme l'italien Cesàro, le français Borel (1895), les allemands Frobenius, Hölder, Toeplitz et Schur, les anglais Bromwich, Hardy et Littlewood, le suédois Nörlund, l'indien Ramanujan, etc ont montré qu'il était tout à fait légitime et cohérent de considérer une série divergente en tant que telle et de lui associer une valeur finie.

### 3.7 Retour à la physique

En physique, la manipulation de quantités infinies a permis de grandes avancées. C'est par exemple le cas en théorie quantique des champs où Wilson a construit le groupe de renormalisation et où Schwinger a découvert une relation entre la régularisation de la fonction  $\zeta$  et la renormalisation. L'un des exemples emblématiques de ces approches est l'effet Casimir. En mécanique quantique, en conséquence du principe d'incertitude de Heisenberg, une position et une vitesse ne peuvent être réduites simultanément à 0 et donc une énergie mécanique ne peut être nulle de façon exacte. Si l'on considère l'existence possible d'un oscillateur (onde) de pulsation  $\omega$ , son énergie minimale, dite énergie de point zéro, aura pour valeur :

$$E_0(\omega) = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

où  $\hbar$  la constante de Planck réduite  $h/2\pi$ .

Entre deux plaques parfaitement conductrices parallèles et distantes d'une longueur  $x$ , les pulsations possibles entre ces deux plaques sont  $\omega_k = k\omega_0$  avec  $k = 1, 2, 3, \dots$  et  $\omega_0 = c\pi/x$ . Donc l'énergie minimale entre ces deux plaques ne contenant rien serait l'énergie de point zéro  $E_0(x)$  pour toutes ces pulsations. L'énergie de point zéro est communément appelée l'énergie du vide entre ces plaques :

$$E_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar k \omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\hbar c \pi}{x} \sum_{k=1}^{\infty} k \quad (3.97)$$

L'énergie de point zéro est communément appelée l'énergie du vide entre ces plaques.

On retrouve ici la série infinie des entiers naturels (3.87) vue précédemment. Or, l'énergie entre deux plaques dans le vide ne peut pas être infinie. En utilisant la régularisation par la fonction Zeta, nous obtenons :

$$E_0(x) = \frac{1}{2} \frac{\hbar c \pi}{x} \left( -\frac{1}{12} \right) = -\frac{\hbar c \pi}{24x} \quad (3.98)$$

Cette énergie pouvant être assimilée à une énergie potentielle, par dérivation, on en déduit l'existence d'une force :

$$F(x) = -\frac{\hbar c \pi}{24x^2} \quad (3.99)$$

le signe négatif indiquant que les plaques s'attirent. La prédiction de l'existence de cette force ainsi que son expression théorique ont été établies en 1948 par le physicien hollandais Casimir. Le plus surprenant est qu'en 1997 la mesure expérimentale de cette force a pu être réalisée [34] et, miracle, cette mesure était cohérente avec la valeur théorique. Pour une analyse théorique plus fine du lien qui existe entre les séries divergente et l'effet Casimir, on pourra consulter [35]. Au final, même si le sujet fait encore l'objet de discussion, cet exemple issue de la physique nous invite à considérer les séries divergentes comme pouvant donner des résultats synthétiques, parfois surprenants, mais en parfaite cohérence avec une description physique plus complexe.

Dans la problématique ondulatoire qui nous occupe, l'expression du champ acoustique global (3.72) conduit à une série divergente faisant appel à des opérateurs linéaires en dimension infinie. La régularisation de cette série par une technique de type, régularisation par la fonction Zeta ou autre, n'a rien d'évident. J'ai donc essayé de trouver une approche plus pragmatique. Je me suis en particulier inspiré du travail de Poincaré dans le deuxième tome de son ouvrage "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" [36]. On peut y lire, au commencement du chapitre VIII, cette réflexion : "Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment."

L'idée sous-jacente était que la troncature d'une série divergente pouvait avoir un sens et que celle-ci fournissait une approximation très satisfaisante du phénomène physique. La problématique est alors de choisir de façon pertinente le point de troncature pour obtenir cette approximation.

## 3.8 Troncature

### 3.8.1 Analyse du problème de divergence

Nous avons vu que l'onde élémentaire  $\Psi_n$  émise par le cylindre pouvait s'exprimer par un spectre d'ondes planes :

$$\Psi_n = H_n^1(kr) e^{in\theta} = \frac{1}{\pi} \int_S e^{ik(x \sin \theta_k - (y-y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (3.100)$$

La réaction directe de l'interface nous est donnée par l'expression :

$$\Psi_n^r = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (3.101)$$

Afin de revenir à une expression sous forme de série modale, la fonction  $R(\theta)$  est décomposée en une série de Fourier :

$$R(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta} . \quad (3.102)$$

Ceci nous a donné la relation :

$$\Psi_n^r = \frac{1}{\pi} \int_S \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta_k} \right) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (3.103)$$

Or, cette décomposition en série de Fourier est purement formelle. En effet, s'il est facile de démontrer la convergence de la série de Fourier vers la fonction  $R(\theta)$  sur l'axe des réels, cela ne justifie en rien la convergence de cette série sur le contour d'intégration  $S$  du plan complexe.

En posant  $z = e^{i\theta}$ , nous mettons la série  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta}$  sous la forme d'une série de Laurent  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m z^m$ . Le théorème de Cauchy-Hadamard, confère [37], nous permet d'affirmer que cette série de Laurent est convergente sur le disque de rayon inférieur  $r_{inf}$  et de rayon supérieur  $r_{sup}$  (voir schéma 3.9), avec :

$$\frac{1}{r_{sup}} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \|R_m\|^{1/m} , \quad (3.104)$$

et

$$r_{inf} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \|R_{-m}\|^{1/m} , \quad (3.105)$$

où  $\limsup$  indique la limite supérieure.

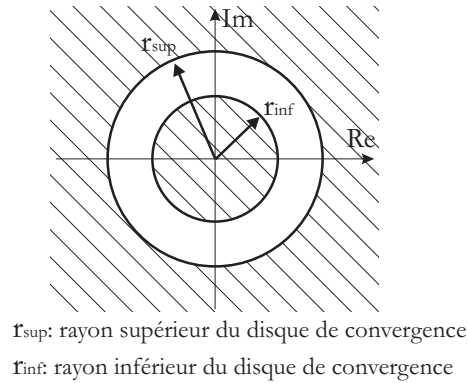
On notera que, mis à part quelques rares exceptions, la fonction  $R(\theta)$  est une fonction paire et  $\forall m, R_m = R_{-m}$ . Ceci impose que  $r_{inf} = 1/r_{sup}$ .

En revenant à la variable  $\theta$ , le disque de convergence de la variable  $z$  impose que :

$$r_{inf} < \|e^{i\theta}\| < r_{sup} , \quad (3.106)$$

c'est à dire que :

$$-\ln(r_{inf}) > \text{Im}(\theta) > -\ln(r_{sup}) , \quad (3.107)$$

Figure 3.9 – Disque de convergence pour la variable  $z$ .

où  $\ln$  indique la fonction du logarithme népérien et  $Im$  la partie imaginaire.

En utilisant la parité de la fonction  $R(\theta)$ , on a :

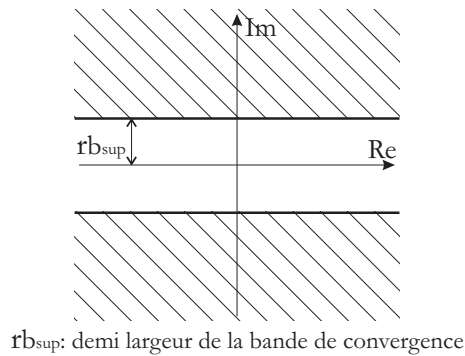
$$\ln(r_{sup}) > Im(\theta) > -\ln(r_{sup}) , \quad (3.108)$$

et

$$rb_{sup} > Im(\theta) > -rb_{sup} , \quad (3.109)$$

avec  $rb_{sup} = \ln(r_{sup})$ .

Ainsi, la série de Fourier associée à  $R(\theta)$  est une série convergente dans le plan complexe sur une bande de largeur  $2rb_{sup}$  autour de l'axe réel (voir schéma 3.10).

Figure 3.10 – Disque de convergence pour la variable  $z$ .

Le rayon de convergence ou la largeur de la bande de convergence, suivant que l'on considère la variable  $z$  ou  $\theta$ , s'applique à la série 3.102 et à son infinité de termes. Ce rayon et cette largeur sont indépendants d'une éventuelle troncature de la série.

On notera enfin que, excepté le cas exceptionnel où ( $r_{sup} = +\infty$ ), la série de Laurent n'est convergente que sur un ensemble borné et en dehors de cet ensemble les termes même de la série

divergent. Or sur un contour de Sommerfeld, le terme  $Im(\theta)$  n'est pas borné. La série de Fourier est donc, sur ce contour, intrinsèquement divergente.

### 3.8.2 Détermination de l'ordre de troncature

En utilisant notre formalisme général, il est possible d'exprimer la fonction de Green, dans le cadre d'un demi-espace. Cette fonction mathématique s'interprète physiquement comme le champ acoustique total, dans le demi-espace concerné, produit par une source ponctuelle unitaire à proximité de l'interface.

En dimension 2, la source ponctuelle unitaire vaut  $G_0(r, \theta) = -i/4H_0^1(kr) = -i/4\Psi_0$  dans le repère cylindrique lié à la source et en espace libre. La décomposition en spectre d'ondes planes de cette source permet de donner l'expression du champ acoustique total en tenant compte de la réflexion de l'interface :

$$P_{tot} = -\frac{i}{4} \left[ \Psi_0 + \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k \right], \quad (3.110)$$

où  $R(\theta)$  est le coefficient de réflexion du plan,  $y_S$  est l'ordonnée du point source et  $\{x, y\}$  les coordonnées de la position de l'observateur.

En appliquant la méthode des images généralisée, nous trouvons que, par définition de l'opérateur linéaire de réflexion  $\mathbf{R}$ , ce champ total est égal à :

$$\mathbf{P}_{tot} = \langle \mathbf{g}_0, \Psi \rangle + \langle \mathbf{g}_0, \mathbf{R} \cdot \Psi^s \rangle, \quad (3.111a)$$

avec :

$$\mathbf{g}_0 = (g_{0_n}) \quad \text{et} \quad g_{0_n} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ -i/4 & n = 0 \end{cases}. \quad (3.111b)$$

Sous forme de série explicite, l'expression 3.111a s'écrit :

$$\mathbf{P}_{tot} = -\frac{i}{4} \left[ \Psi_0 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s \right], \quad (3.112)$$

où  $r_p$  est le p-ième coefficient de la série de Fourier associée à la fonction  $R(\theta)$ .

Une méthode de validation de notre théorie consiste à étudier la cohérence entre la formulation intégrale et obtenue par la méthode des images généralisée, c'est à dire vérifier l'égalité entre les expressions :

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k, \quad (3.113a)$$

$$E_2(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s \quad (3.113b)$$

pour plusieurs positions de l'observateur  $M$ .



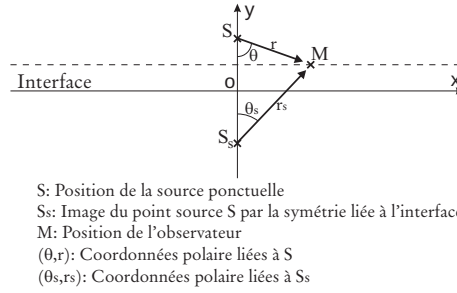


Figure 3.11 – Source ponctuelle à proximité de l'interface.

### Exemple numérique

Considérons, par exemple, le cas d'une interface fluide-fluide (un fluide 1 dans le demi-espace supérieur et un fluide 2 dans le demi-espace inférieur). Connaissant les vitesses de propagation et la masse volumique de ces deux milieux,  $\{c_1, \rho_1\}$  et  $\{c_2, \rho_2\}$ , nous pouvons déterminer de façon exacte l'expression du coefficient de réflexion  $R(\theta)$  associée à une interface fluide-fluide [39, 38] :

$$R(\theta) = \frac{\rho_2/\rho_1 \cos \theta - \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}}{\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}} . \quad (3.114)$$

Il faut noter que dans la définition du coefficient de réflexion fluide-fluide 3.114, la fonction  $\sqrt{\phantom{x}}$  est une fonction multivalente [37] et que sur le plan complexe  $\sqrt{z^2} = z$  ou  $\sqrt{z^2} = -z$ . Pour lever cette indétermination, il faut rappeler que  $\sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} * c_2/c_1$  exprime le cosinus de l'angle réfracté  $\theta_r$ . L'onde réfractée dans le milieu 2 est alors de la forme : *Constante*  $e^{ik \sin \theta_r x} e^{-ik \cos \theta_r y}$ ,  $x$  et  $y$  étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée de l'observateur. La condition de Sommerfeld à l'infini quand  $y \rightarrow -\infty$ , impose que  $Im(\cos \theta_r) \geq 0$  ( $Im(\phantom{x})$  indique la partie imaginaire). C'est à dire que  $Im\left(\sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}\right) \geq 0$ . Par la suite, la fonction  $\sqrt{\phantom{x}}$  devra toujours être étudiée dans le feuillet qui vérifie cette condition.

Choisissons pour le second milieu l'eau et pour le premier un milieu sédimentaire considéré comme un fluide parfait, nous aurons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_2 &= 1470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Alors, dans le plan complexe, la fonction  $R(\theta)$  admet quatre points de branchement et deux pôles  $z = \pm \arccos\left[-\sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}}\right]$ . Numériquement, les pôles se situent en  $z \simeq \pm(\pi/2 + I0.91)$ , voir la vue globale sur la figure 3.12. Qualitativement, les pôles se trouvent éloignés du contour de Sommerfeld et ne perturbent que peu la régularité de la fonction sur ce contour.

Dans ce contexte numérique, les modules des termes de la série 3.113b pour un observateur situé à  $kr_s = 10$ ,  $kr_s = 20$  et  $kr_s = 50$ , avec  $r_s$  la distance entre l'observateur et l'image du point source (voir figure 3.11), nous sont donnés par les figures 3.13, 3.14 et 3.15.

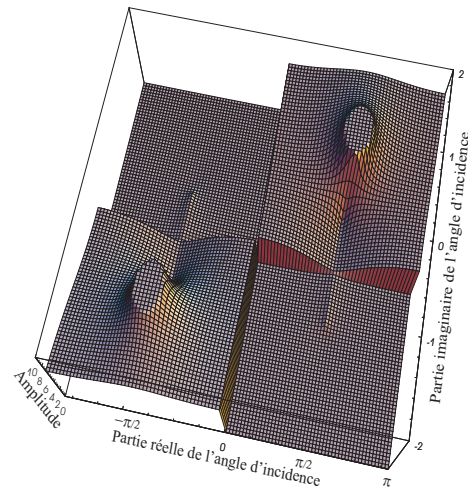


Figure 3.12 – Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe.

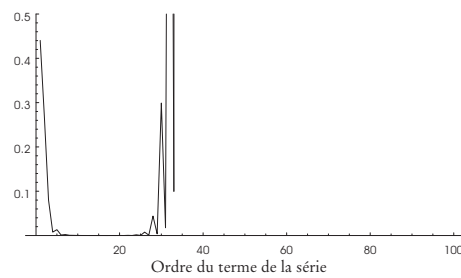


Figure 3.13 – Modules des termes de la série 3.113b pour  $kr_s = 10$ .

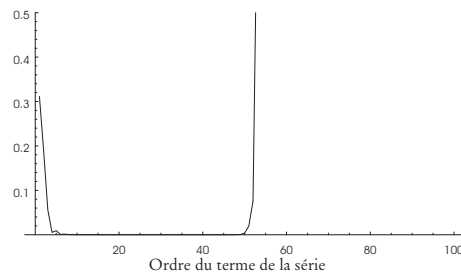


Figure 3.14 – Modules des termes de la série 3.113b pour  $kr_s = 20$ .

Les termes de la série 3.113b décroissent rapidement avec l'ordre, mais à partir d'un certain rang les termes de cette série divergent. La convergence de la série 3.113b n'a donc pas de sens

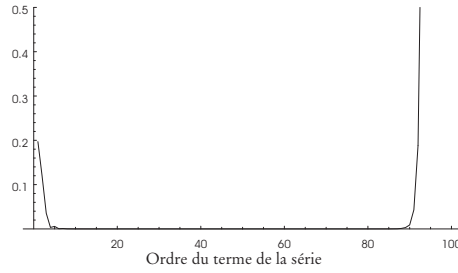


Figure 3.15 – Modules des termes de la série 3.113b pour  $kr_s = 50$ .

en terme classique de convergence des séries. Cette série doit être considérée comme une série asymptotique [40].

Les figures 3.13, 3.14 et 3.15 nous montrent que le comportement divergent des termes de la série dépend du facteur  $kr_s$  relatif au point d'observation. Il est naturel de penser que la troncature optimale de la série doit se faire à un ordre qui dépendra de la valeur du facteur  $kr_s$ .

A titre d'illustration, on peut choisir de faire varier le point d'observation  $M$  de façon parallèle à l'interface et à une hauteur moitié par rapport au point source, voir figure 3.11. On choisira  $k$  de telle façon qu'en  $x = 0$ , on ait  $kr_s = 10$  et  $x_{max}$  tel qu'en  $x = x_{max}$ , on ait  $kr_s = 100$ . La série 3.113b sera tronquée en prenant la partie entière de  $kr_s/2$ , mais en conservant un minimum de 7 termes. On constate que dans ces conditions, le calcul effectué par intégration 3.113a et l'estimation de la série 3.113b donnent des résultats quasi identiques, voir figure 3.16.

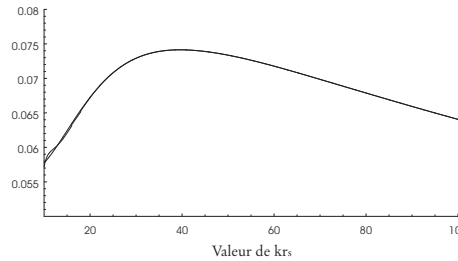


Figure 3.16 – Superposition des courbes obtenues par intégration et par estimation de la série.

La courbe 3.17 nous montre l'erreur  $err$  entre les deux calculs relativement à l'intégration. En prenant les notations établies aux équations 3.113a et 3.113b, on a

$$err = \frac{\|E_1(x, y) - E_2(x, y)\|}{\|E_1(x, y)\|}. \quad (3.116)$$

L'erreur relative maximale calculée est de l'ordre de 1% et devient négligeable quand  $kr_s$  est supérieur à 20. Le modèle de la fonction de Green sous forme de série semble donc parfaitement justifié dans les conditions précisées précédemment.

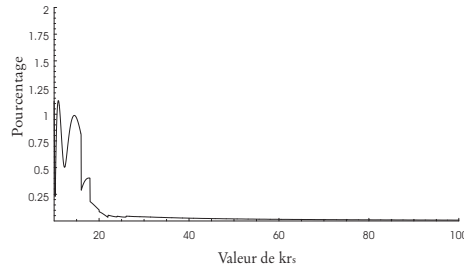


Figure 3.17 – Pourcentage de l’erreur relative entre les deux calculs.

### Autres exemples numériques

On peut retrouver d’autres exemples d’applications numériques dans les études [25, 24, 23], notamment en inversant le rôle des fluides 1 et 2. On retrouvera également le cas d’une interface fluide-solide dont le coefficient de  $R(\theta)$  est de la forme :

$$R(\theta) = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left( \left( \left( \frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \right) - \left( \frac{c_1}{c_{T2}} \right)^4 \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left( \left( \left( \frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \right) + \left( \frac{c_1}{c_{T2}} \right)^4 \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}} \quad (3.117)$$

$\{c_{L2}, c_{T2}, \rho_2\}$  étant respectivement la vitesse de propagation de l’onde longitudinale et transversale dans le solide et sa masse volumique. On constate dans ce dernier cas de fortes irrégularité de la fonction  $R(\theta)$  dans le plan complexe, voir figure 3.18.

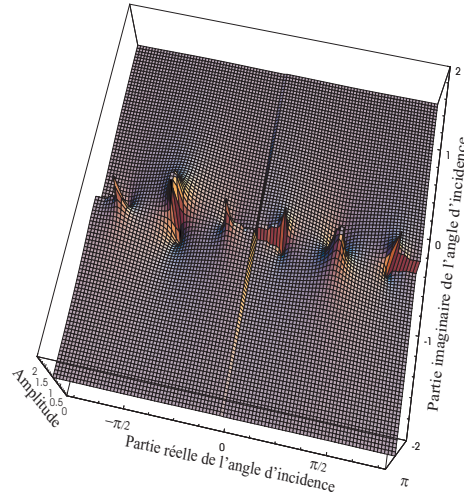


Figure 3.18 – Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-solide sur le plan complexe.

Quoi qu'il en soit, dans tous ces exemples, le choix pertinent semble être de fixer le rang de la troncature un peu supérieur au produit  $kr_s$ . En posant ce choix, il devient rapidement possible de simuler le champ acoustique global diffusé par un couplage cylindre et interface plane.

### 3.9 Validation par la théorie de rayon

Il est possible de compléter la validation de la méthode des images généralisée en montrant qu'elle donne des résultats proche d'autres méthodes d'approximation, par exemple la modélisation par la théorie de rayon. Pour appliquer une théorie de rayon, il faut décrire les ondes de surface présentes au bord du cylindre. Le passage de la théorie modale (matrice  $\mathbf{T}$ ) d'un cylindre à la théorie des ondes de surface se fait en utilisant la transformation de Watson. Une synthèse détaillée est proposée au chapitre 9 de la référence [41] par André Derem.

En quelques mots, la transformation de Watson consiste à remplacer une série de la forme :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n F_n(x) , \quad (3.118)$$

par une intégrale de contour dans le plan complexe :

$$p(x) = \frac{i}{2} \int_C \frac{F_\nu(x)}{\sin \pi \nu} d\nu , \quad (3.119)$$

où  $C$  est le contour indiqué sur la figure 3.19.

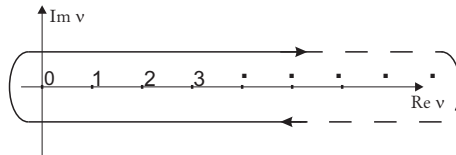


Figure 3.19 – Contour  $C$  associé à la transformation de Sommerfeld-Watson.

Après diverses modifications de contour, on obtient un nouveau contour faisant apparaître les différentes singularités du plan appelées pôles physiques. Chacun de ces pôles correspond à des ondes de surfaces et donne par sa partie réelle et imaginaires les caractéristiques de cette ondes (atténuation en particulier). Muni de ces caractéristiques physiques, il devient possible de réaliser une estimation du champ par une théorie de rayon.

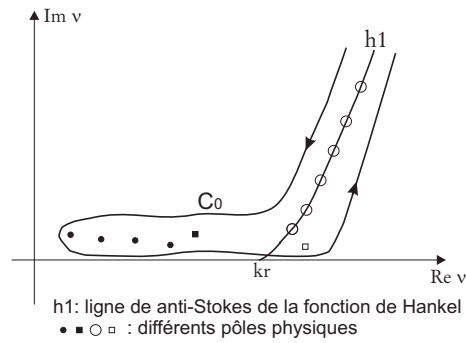


Figure 3.20 – Contour  $C_0$  englobant tous les pôles physiques.

### 3.9.1 Modèle harmonique

En positionnant un observateur  $M$  entre le cylindre et l'interface, il est possible de calculer le champ acoustique en considérant les trois contribution principales de la théorie de rayon, voir schéma

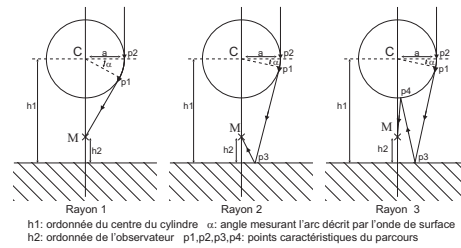


Figure 3.21 – Trois premières contributions pour le calcul de rayons.

En considérant un cylindre rigide, la transformation de Watson montre alors que les ondes de surface sont uniquement des ondes de Franz dont on connaît les caractéristiques. L'estimation quantitative en prenant en compte les trois rayons est alors possible. Une comparaison entre la théorie des images généralisée et la théorie de rayon en fonction de la position de l'observateur montre que les deux approches sont cohérentes, voir figure 3.22.

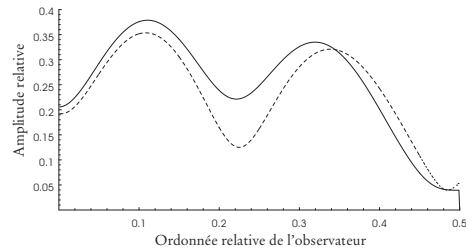


Figure 3.22 – Amplitude du champ acoustique entre l’interface plane et le cylindre : théorie de rayon (trait discontinu) et méthode des images généralisée (trait continu).

### 3.9.2 Modèle temporel

Une autre façon de vérifier la cohérence physique est de réaliser le calcul par théorie des images généralisées pour une spectre de fréquence très large et d’effectuer une analyse temporelle d’un champ acoustique incident impulsionnel. En plaçant l’observateur au dessus du cylindre nous avons obtenu, la figure

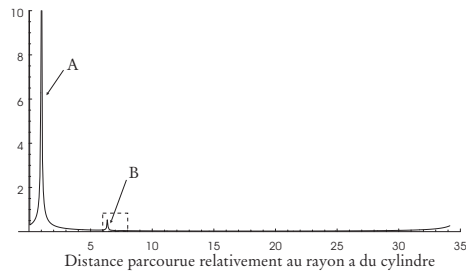


Figure 3.23 – Résultat de la transformée de Fourier inverse.

En calculant les temps de trajets (en espace libre et en tant qu’onde de surface, les pics *A* et *B* correspondent exactement au temps de parcours des trajets des deux rayons de la figure 3.24.

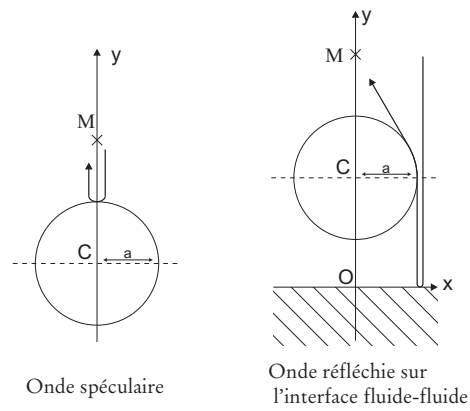


Figure 3.24 – Deux principales composantes.

En effectuant un zoom sur la partie encadrée de la figure 3.23, on peut apercevoir deux autres composantes, cf figure 3.25.

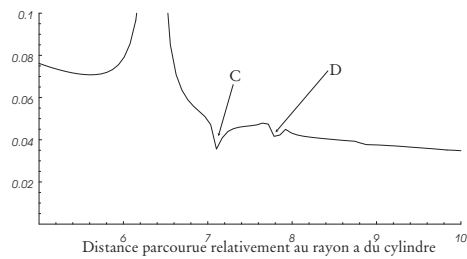


Figure 3.25 – Zoom de la figure 3.23.

Par le calcul des temps de retard, on retrouve deux nouveaux trajets de rayons, voir figure 3.26.



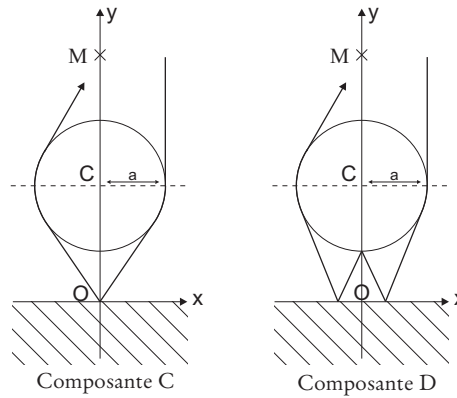


Figure 3.26 – Deux autres composantes.

### 3.10 Simulation numérique

Finalement, après avoir apporté quelques éléments de validation de la théorie de images généralisées, il est possible de calculer sans difficulté le champ acoustique produit par un tube élastique à proximité d'une interface plane, cf. figure 3.27.

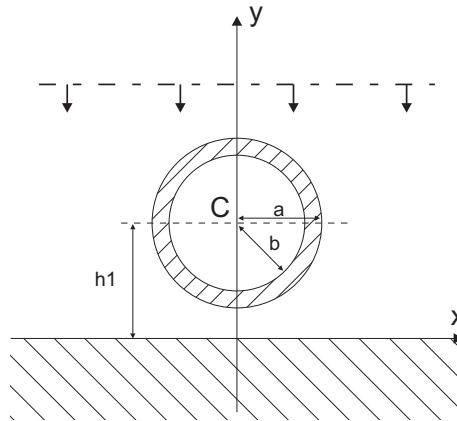


Figure 3.27 – Configuration du tube à proximité de l'interface plane.

En reprenant les paramètres numériques de l'interface fluide-fluide précédemment vue et en considérant les paramètres du tube tels que :

$$a = 0,003572 \text{ m}, \quad \frac{b}{a} = 0,9, \quad (3.120)$$

où  $a$  est le rayon externe et  $b$  le rayon interne.

Les caractéristiques physiques du tube sont :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 2790 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_L &= 6380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, & c_T &= 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.121)$$

où  $\rho_i$  indique la masse volumique du milieu indicé  $i$ . La vitesse de l'onde dans le fluide externe, la vitesse longitudinale et la vitesse transversale dans le corps du tube sont notés respectivement  $c_1$ ,  $c_L$  et  $c_T$ . La partie creuse du tube est considérée comme vide.

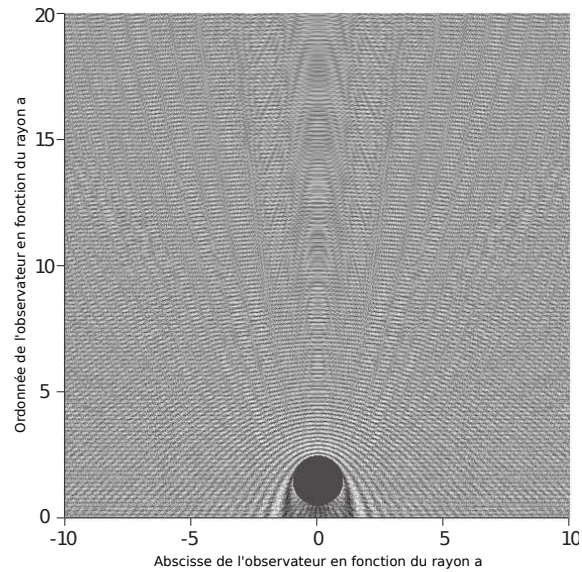


Figure 3.28 – Simulation numérique du champ acoustique global d'une onde plane monochromatique diffusée par un ensemble cylindre et interface plane.

### 3.11 Quelques compléments

La théorie des images généralisées ayant été établie, il est possible de la développer en considérant les cas d'un cylindre enfoui en milieu sédimentaire [25] ou encore dans un guide d'onde [23]. Par ailleurs, j'ai également développé dans le cadre de la théorie modale une modélisation de la matrice  $\mathbf{T}$  d'un cylindre lorsque celui-ci n'est pas section circulaire [23]. Cette dernière thématique a fait l'objet de nombreux développements ultérieurs. On peut citer par exemple [42].

Enfin, je voudrais terminer cette partie en disant que la problématique des séries divergentes que je viens d'exposer n'est certainement pas une situation unique en acoustique et plus généralement en physique ondulatoire. Je citerais par exemple un travail en électromagnétisme [43].

### 3.12 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre a marqué, pour moi, une étape essentielle dans ma formation par la recherche. En laissant de côté le contexte particulier de l'acoustique sous-marine, ce travail m'a permis d'acquérir de solides compétences générales en physique des ondes en adoptant un formalisme rigoureux. Le point de vue de la théorie modale a ainsi mis en lumière les liens étroits existant entre la problématique physique, l'analyse fonctionnelle et l'algèbre des opérateurs. Confronté au problème de la gestion des séries divergentes, j'ai été amené à sortir du cadre conventionnel de ce qui est classiquement enseigné en théorie de limites et de comprendre que ces nouveaux horizons peuvent conserver une pertinence dans l'interprétation physique. Enfin, ce travail m'a obligé à comprendre précisément le passage de la théorie modale à une théorie de rayon par application de l'analyse du domaine complexe.

### Références

1. Lejeune, A. *L'optique de Claude Ptolémée, dans la version latine d'après l'arabe de l'émir Eugène de Sicile*. (E. J. Brill, 1989).
2. Smith, A. M. *Alhacen on image formation and distortion in mirrors. A Critical Edition, with English Translation and Commentary, of Book 6 of Alhacen's De aspectibus*. (American Philosophical Society, 2006).
3. Simon, G. L'optique d'Ibn Al-Haytham et la tradition ptoléméenne. *Arabic Sciences and Philosophy* **2**, 203-235 (1992).
4. Bruneau, M. *Fundamentals of Acoustics* (ISTE, 2006).
5. Rossing, T. D. *Springer Handbook of Acoustics* (Springer, 2007).
6. Watson, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions* 2nd (Cambridge University Press, 1945).
7. Al-Gwaiz, M. *Sturm-Liouville Theory and its Applications* (Springer, 2008).
8. Marchenko, V. A. *Sturm-Liouville Operators and Applications* (Birkhäuser, 1986).
9. Hanson, G. W. & Yakovlev, A. B. *Operator Theory for Electromagnetics* (Springer, 2002).
10. Shubin, M. A. *Pseudo differential Operators and Spectral Theory* (Springer, 2001).
11. Conway, J. B. *A Course in Operator Theory* (American Mathematical Society, 1991).

12. Hall, B. C. *Quantum Theory for Mathematicians* (Springer, 2013).
13. Twersky, V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.* **24**, 42-46 (jan. 1952).
14. Twersky, V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary planar configuration of parallel cylinders and by two parallel cylinders. *J. Appl. Phys.* **23**, 407-414 (1952).
15. Kheddioui, E. *Diffusion acoustique par deux tubes élastiques immergés* Thèse (Université du Havre, juin 1995).
16. Gaunaurd, G. C., Huang, H. & Strifors, H. C. Acoustic scattering by a pair of spheres. *J. Acoust. Soc. Am.* **98**, 495-507 (juil. 1995).
17. Huang, H. & Gaunaurd, G. C. Acoustic scattering by a plane wave by two spherical elastic shells. *J. Acoust. Soc. Am.* **98**, 2149-2156 (oct. 1995).
18. Sancar, S. & Pao, Y.-H. Spectral analysis of elastic pulses backscattered from two cylindrical cavities in a solid. Part I. *J. Acoust. Soc. Am.* **69**, 1591-1596 (juin 1981).
19. Sancar, S. & Sachse, W. Spectral analysis of elastic pulses backscattered from two cylindrical cavities in a solid. Part II. *J. Acoust. Soc. Am.* **69**, 1597-1609 (juin 1981).
20. Varadan, V. Scattering matrix for elastic waves. II. *J. Acoust. Soc. Am.* **63**, 1014-1024 (1978).
21. Abramowitz, M. & Stegun, I. *Handbook of mathematical functions* (Dover Publications, New-York, 1965).
22. Sommerfeld, A. *Partial differential equations in physics* (Academic Press, New-York, 1949).
23. Coatanhay, A. *Diffusion acoustique par un objet cylindrique à proximité d'une interface plane* thèse de troisième cycle (Université du Havre, 2000).
24. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. Scattering Near a Plane Interface Using a Generalized Method of Images Approach. *J. Comput. Acoust.* **12**, 233-256 (2004).
25. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. Scattering by an elastic cylinder embedded in a fluid sediment. Generalized Method of Images (GMI) approach. *Wave Motion* **44**, 77-91 (2006).
26. Gaunaurd, G. C. & Huang, H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary. *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 2526-2536 (oct. 1994).
27. Coatanhay, A. & Conoir, J.-M. *Scattering by an elastic cylinder buried in a sedimentary fluid medium* in *ASA American Society of Acoustic* (Seattle (Wa), USA, 20-26 June 1998).
28. Fawcett, J. A. Evaluation of the integrals of target/seabed scattering using the method of complex images. *J. Acoust. Soc. Am.* **114**, 1406-1415 (sept. 2003).
29. Cartan, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques. D'une ou plusieurs variables complexes* (Hermann, 1997).
30. Borel, É. Mémoire sur les séries divergentes. *Annales scientifiques de l'É.N.S. 3* **16**, 9-131 (1899).
31. Elizalde, E. *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions* (Springer, 2012).
32. Berndt, B. C. *Ramanujan's Notebooks : Part I* (Springer New York, 2012).
33. Hardy, G. H. *Divergent series* (Oxford University Press, 1949).
34. Bressi, G., Carugno, G., Onofrio, R. & Ruoso, G. Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces. *Physical Review Letters* **88** (2002).

35. Bordag, M., Klimchitskaya, G., Mohideen, U. & Mostepanenko, V. *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, 2009).
36. Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Gauthier-Villars et Fils, 1893).
37. Chabat, B. *Introduction à l'analyse complexe. Tome I. Fonctions d'une variable* (Editions Mir, Moscou, 1990).
38. Brekhovskikh, L. M. & Godin, O. A. *Acoustics of layered media I. Plane and quasi-plane waves* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
39. Conoir, J.-M., Gérard, A. & Derem, A. Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes. *J. Acoustique* **4**, 159-200 (1991).
40. Borel, E. *Leçons sur les séries divergentes* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).
41. Gespa, N. *La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences* (Imprimerie du CEDOCAR, Paris, 1987).
42. Léon, F., Chati, F. & Conoir, J.-M. Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section. *J. Comput. Acoust.* **116**, 686-692 (2004).
43. Van der Sijs, T. A., El Gawhary, O. & Urbach, H. P. Electromagnetic scattering beyond the weak regime : Solving the problem of divergent Born perturbation series by Padé approximants. *Phys. Rev. Research* **2**, 013308-1-12 (2020).

## Chapitre 4

---

# Ondes et activités cérébrales

---

Ce chapitre présente les activités de recherche que j'ai menées au sein du centre de recherche FORENAP durant les trois années qui ont suivi mon doctorat. Il s'agissait pour moi d'une rupture importante par rapport à mes activités de recherche précédentes. Confrontés à des équipes de scientifiques internationaux de premier plan en neurosciences, en pharmacologie et en systèmes biomédicaux, mon adaptation s'est faite au prix d'un très lourd investissement dans l'apprentissage du fonctionnement cérébral et des technologies de pointe mises à ma disposition. Le début de ce chapitre cherche à fournir quelques clés de compréhension du domaine au travers d'une sensibilisation la plus synthétique et la plus concise possible. Dans ce contexte, mon travail de recherche se décompose en deux parties. La première, davantage portée sur les techniques de traitement du signal et de l'information, est évoquée par le biais d'un exemple d'étude pris parmi de nombreux autres. La seconde, plus orientée vers la modélisation électromagnétique et les problèmes inverses, fait l'objet d'une présentation plus détaillée. Par ailleurs, un point qui n'est pas explicité ici, mais qui peut se laisser deviner en filigrane, est que ce centre est situé au milieu d'un vaste complexe psychiatrique et que la confrontation avec les patients, de toutes sortes, était quotidienne. Cette période a donc bien évidemment été l'occasion aussi d'une expérience humaine forte.

4.1	Au commencement était le cerveau . . . . .	77
4.2	Trois dispositifs biomédicaux . . . . .	80
4.2.1	Imagerie par résonance magnétique (IRM) . . . . .	80
4.2.2	Électroencéphalographie . . . . .	83
4.2.3	Magnétoencéphalographie . . . . .	86
4.3	Mes recherches . . . . .	90
4.3.1	Traitement du signal . . . . .	90
4.3.2	Approche modélisation . . . . .	94
4.3.3	Quelques compléments . . . . .	101
4.4	Conclusion . . . . .	105

## 4.1 Au commencement était le cerveau

L'idée que le siège de nos pensées, nos émotions, nos rêves ou notre inconscient soit situé dans le cerveau apparaît aujourd'hui comme une évidence. Pourtant cette idée est en réalité relativement récente. Il y a 4000 ans, dans l'épopée de Gilgamesh [1], les émotions et les sentiments proviennent

du cœur. Dans les écrits sanskrit du Rig-Veda [2], datant de 3200 ans, la pensée elle-même est issue du cœur. On retrouve aussi cette croyance sur la pierre de Chabaka, une stèle de basalte de l'Égypte ancienne écrite en hiéroglyphe et conservée au British Museum, ou encore dans l'ancien testament, notamment dans le livre des psaumes. Sur le continent américain, les Mayas (250-900) et les Aztèques (250-900) la partageaient également.

Au iv<sup>e</sup> siècle av. J.-C., Aristote ne reconnaît pratiquement aucune fonction au cerveau dans sa conception de la sensation, du mouvement volontaire et de l'intelligence. Pour le philosophe, l'encéphale est un organe froid, humide, entièrement dépourvu de sang et chargé de refroidir la chaleur cardiaque et de susciter le sommeil [3]. Pour Hippocrate, issu de l'école de médecine de l'île de Kos, le cerveau joue clairement un rôle central. Sa démarche médicale cherche d'ailleurs à expliquer différentes pathologies et en particulier l'épilepsie, qui revêt à l'époque un caractère de châtement divin [4]. Malgré une certaine confusion et de nombreuses erreurs, les travaux de l'école de médecine de l'île de Kos ont constitué l'une des premières sources documentées de d'anatomie de cerveau. Certes, des traces préhistoriques de trépanation ayant été relevées, il y a plus de 10000 ans, d'autres travaux antérieurs ont certainement existé, mais les sources anciennes restent fort rares et éparses.

C'est sans doute Galien au ii<sup>e</sup> siècle ap. J.-C., qui par le biais d'expériences animales discutables [5], a certainement réussi à convaincre le monde occidental que le cerveau jouait un rôle majeur sur l'intellect et que le cœur n'intervenait que de façon secondaire. Les idées de Galien furent également reprises par le médecin et psychologue persan, du x<sup>e</sup> siècle Ali ibn Abbas al-Majusi [6], aussi appelé Haly Abbas sous sa forme latinisée.

Avec l'arrivée du christianisme, il y a peu d'évolution sur le rôle joué par le cerveau. L'essentiel est surtout d'identifier chez l'homme la dualité âme et corps, considérés comme indissociables (voir saint Augustin et saint Thomas d'Aquin), si ce n'est que l'âme humaine est considérée comme immortelle (concile de Latran, 1513). D'un point de vue médical, la dissection de cadavres humains est tolérée puisque l'âme est montée au Ciel, voir l'Encyclique de Sixte IV en 1475. Néanmoins, il faudra surtout attendre la Renaissance pour voir cette pratique se développer, avec par exemple Mondino de Leuzzi, Léonard de Vinci, ou Ambroise Paré, qui découvrent progressivement l'extraordinaire complexité du cerveau humain.

Au xvii<sup>e</sup> siècle, en plein essor de la physique newtonienne, on cherchera des explications plus mécanistes du cerveau. Newton crée la « psychophysique », qui cherche à établir des relations fonctionnelles entre les dépendances du corps et celles de l'esprit, à travers des relations sensorielles. Il pressent un mécanisme "vibratoire" entre le cerveau et le corps passant par les nerfs sans pouvoir en expliciter sa nature. En France, Descartes croit identifier dans la glande pinéale, aujourd'hui appelée épiphyse, le lieu de communication entre l'âme et la pensée. Tout au long du xviii<sup>e</sup> siècle et xix<sup>e</sup> siècle, des philosophes, comme Kant ou Hegel, chercheront à conserver cette vision dualiste.

À partir de la fin des années 1750, à Bologne, siège de la plus ancienne université, de vifs débats sur le rôle de l'électricité dans le fonctionnement des nerfs ont commencé à surgir. Des comparaisons sont faites entre des chocs nerveux les décharges électriques réalisées à l'aide d'une bouteille de Leyde. Vers 1790, Galvani mit en évidence des liens entre les contractions musculaires, les nerfs et une certaine électricité qualifiée d'animale. De nombreuses expériences se développèrent dans toute l'Europe. En 1812, Mary Shelley, autrice de Frankenstein, participa à l'une d'elles. Le xix<sup>e</sup> siècle fut marqué par une amélioration constante de la connaissance anatomique du cerveau, voir planches 4.1, et son fonctionnement. L'idée que le cerveau soit le lieu de toutes nos activités psychiques devenait de plus en plus répandues. Même Freud, pour qui le cerveau n'avait que peu de lien avec la psychanalyse devait tout de même reconnaître en 1915 qu'il "existe des preuves irréfutables que

l'activité mentale est liée au fonctionnement du cerveau plus qu'à celui d'aucun autre organe". Le xx<sup>e</sup> siècle marqua une accélération vertigineuse des moyens expérimentaux, en particulier électromagnétiques, permettant d'analyser le fonctionnement du cerveau. Les neurosciences ont ainsi bouleversé nos conceptions et nous interrogent constamment sur ce que nous sommes. Le développement en parallèle de l'informatique et de l'intelligence artificielle ont encore ouvert davantage les perspectives. Étant d'un esprit curieux, je n'ai pu résister, en 1998, à la proposition qui m'avait été faite d'intégrer le centre de recherche en neuroscience FORENAP, à Rouffach en Alsace. Ce centre international, reconnu par l'OMS, était spécialisé en neuropsychiatrie et dans les troubles du sommeil. Ce centre a malheureusement dû fermer ses portes en 2012, mais il disposait d'un équipement de premier plan en électroencéphalographie, magnétoencéphalographie et en imagerie par résonance magnétique nucléaire qui m'ont permis de mener une activité de recherche riche et variée jusqu'en 2001.

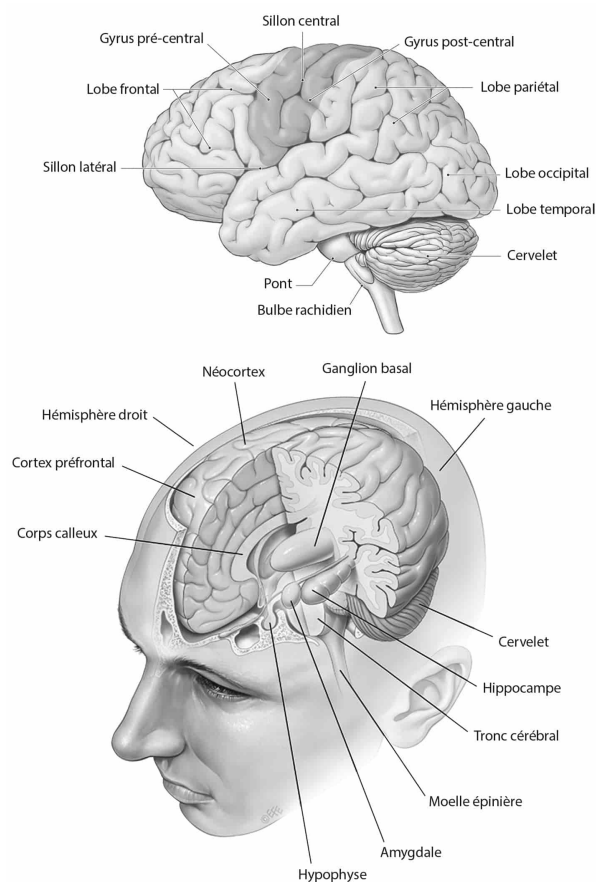


Figure 4.1 – Planche anatomie du cerveau humain, extraite de [5].



## 4.2 Trois dispositifs biomédicaux

### 4.2.1 Imagerie par résonance magnétique (IRM)

En 1946, Felix Bloch [7, 8] et Edward Mills Purcell [9] publièrent, indépendamment, trois articles posant les principes de la résonance magnétique nucléaire, qui permit, dans les années 70, un développement considérable des systèmes d'imagerie en médecine 4.2. Ces chercheurs obtiendront conjointement le prix Nobel de physique en 1952.

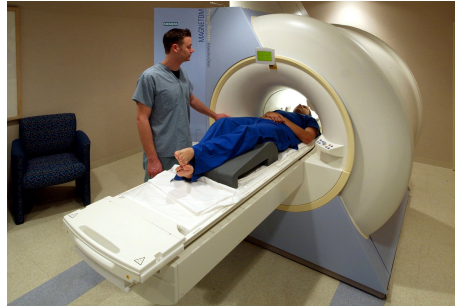


Figure 4.2 – Système d'imagerie par résonance magnétique nucléaire.

Le principe de la résonance magnétique nucléaire repose typiquement sur le fait que le noyau d'un atome d'hydrogène, c'est à dire un proton, possède une charge électrique  $e = 1.60217 C$ , un spin  $\mathbf{S}$ , analogue à un moment cinétique, avec  $S = |\mathbf{S}| = \frac{1}{2}\hbar$  et un moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  :

$$\boldsymbol{\mu} = 5.5857\mu_N\mathbf{S}/\hbar \quad (4.1)$$

où  $\mu_N = 5.05078353 \times 10^{-27} JT^{-1}$  est le magnéton nucléaire (constante en physique). On retiendra simplement la proportionnalité  $\boldsymbol{\mu} = \kappa\mathbf{S}$ . En théorie quantique, l'amplitude du spin  $\mathbf{S}$  ne peut prendre que des valeurs discrètes  $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$  avec  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ . Dans le cas d'un proton  $s = \frac{1}{2}$  et si on observe la composante de  $\mathbf{S}$  selon une direction d'intérêt  $Oz$ , sa composante  $S_z$  sera égale à  $\pm\frac{1}{2}\hbar$ , cf. expérience de Stern et Gerlach [10]. On aura donc  $\mu_z = \pm\gamma\frac{1}{2}\hbar$ . Soumis à un champ magnétique fort  $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{u}}_z$  (en IRM l'intensité est classiquement comprise entre  $0.5 T$  et  $1 T$ ), le moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  s'alignera pas, contrairement à la physique classique, dans la direction  $Oz$ . Il existe donc un couple non nul  $\mathbf{B}_0 \times \boldsymbol{\mu}$ . En reprenant une analogie avec la physique classique, cela induit un mouvement de précession du moment magnétique du proton autour du champs magnétique  $\mathbf{B}_0$ , voir figure 4.3. Cette précession dite de Larmor s'effectue avec une vitesse angulaire proportionnelle à l'amplitude du champ magnétique  $\omega_0 = \gamma B_0$ , appelée pulsation de Larmor.

Chaque proton peut avoir une composante longitudinale, c'est à dire suivant  $Oz$ , soit égale à  $\kappa\frac{1}{2}\hbar$  (configuration parallèle) soit égale à  $-\kappa\frac{1}{2}\hbar$ . Les configurations parallèle et antiparallèle correspondent respectivement à des niveaux d'énergies  $E_1$  et  $E_2$ . Comme le niveau d'énergie  $E_1 = -\gamma\hbar B_0/2$  est un peu plus faible que  $E_2 = \gamma\hbar B_0/2$ , à l'équilibre, il y aura statistiquement une légère dissymétrie entre le nombre de protons dans les deux configurations, un peu plus élevé dans la configuration parallèle. Pour un champ de l'ordre de  $0.5 T$  et à température corporelle, cette différence est de l'ordre de 2 par million. Le vecteur d'aimantation macroscopique  $\mathbf{M}$  aura une composante

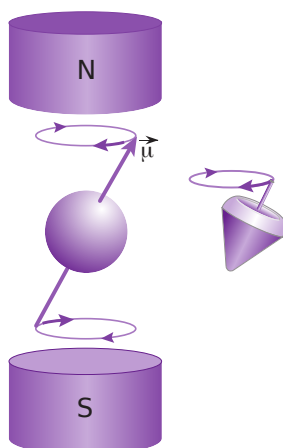


Figure 4.3 – Précession de Larmor autour d'un champ magnétique, figure extraite de [11].

$M_z = M_{z0}$  positive. Par ailleurs, la précession des différents protons étant complètement décorrélée (distribution uniforme des composantes transverses), les composantes de  $\mathbf{M}$  dans le plan  $Oxy$  sont nulles. Au final, à l'équilibre, le vecteur d'aimantation macroscopique  $\mathbf{M}$  aura même direction et même sens que  $\mathbf{B}_0$ .

Considérons maintenant un champ magnétique  $\mathbf{B}_1$  perturbatif et orienté dans le repère tournant  $Ox'y'$  selon  $Ox'$ . Si ce champ variable est choisi telle que sa pulsation  $\omega$  soit égale à celle de Larmor  $\omega_0$  (fréquence de l'ordre de  $40\text{ MHz/T}$ ), alors il y aura un phénomène de couplage. Ce couplage appliqué durant une courte impulsion aura deux effets distincts. Le premier est qu'il y aura transmission d'énergie et modification de la répartition statistique entre les niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2$ . Cela conduira à la diminution de la composante  $M_z$ , pouvant aller jusqu'à l'annulation (cas  $90^\circ$ ), voire à l'inversion  $M_z = -M_{z0}$  (cas  $180^\circ$ ). Par ailleurs, les changements de niveaux d'énergie engendrés par un champ électromagnétique externe induit une synchronisation de la précession des protons et donc l'apparition d'une composante transversale  $M_y$  du vecteur d'aimantation macroscopique. Globalement, cela apparaîtra comme une rotation du vecteur d'aimantation  $\mathbf{M}$  dans le repère tournant, mouvement en spirale dans le référentiel fixe, voir figure 4.4.

Dès que l'impulsion électromagnétique prend fin, les composantes longitudinales et transversales de l'aimantation  $\mathbf{M}$  reviennent à la situation d'équilibre mais avec un certain temps de relaxation. On note respectivement  $T_1$  et  $T_2$  les temps correspondant à 63% de la situation d'équilibre pour la composante longitudinale et transversale, figure 4.5. Ces temps de relaxation dépendent étroitement de la nature du milieu excité : de  $500\text{ms}$  à  $1000\text{ms}$  pour le temps  $T_1$  et de  $50\text{ms}$  à  $100\text{ms}$  pour le temps  $T_2$ . Ces différences permettent d'identifier la nature d'une zone cérébrale (substance grise, substance blanche, os, eau, tumeur,...). Cette période de relaxation s'accompagne d'une réémission par le milieu excité d'une impulsion RF que l'on peut capter grâce à une antenne réceptrice.

Afin d'obtenir une imagerie par résonance magnétique nucléaire et donc sélectionner une zone spatiale (un voxel en IRM est de l'ordre de  $3 - 4\text{mm}^3$ ), Lauterbur [12] proposa d'introduire un gradient variable  $\mathbf{G}(t)$  sur le champ magnétique principal  $\mathbf{B}_0$ , c'est à dire  $\mathbf{B}'_0 = (B_0 + G_x(t)x + G_y(t)y + G_z(t)z)\hat{\mathbf{u}}_z$  ou encore  $\mathbf{B}'_0 = (B_0 + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{u}}_z$ .

Le signal RF reçu par l'antenne réceptrice mesure l'amplitude et la phase de ce signal qui

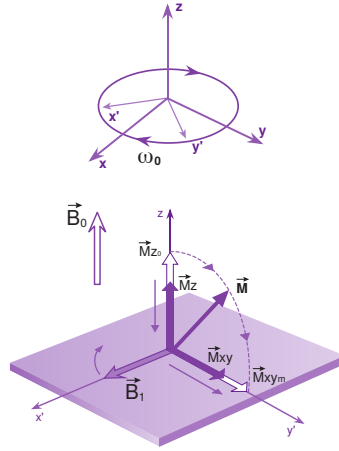


Figure 4.4 – Modification de l'orientation du vecteur d'aimantation macroscopique, figure extraite de [11].

correspond à la somme des contributions locales :

$$S(t) = \iiint \rho(x, y, z) e^{-i\omega_0 t - i\phi(x, y, z, t)} dx dy dz \quad (4.2)$$

Le gradient  $\mathbf{G}(t)$  va induire une précession supplémentaire  $\gamma \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{r}$  et donc engendrer localement une accumulation de déphasage  $\phi(\mathbf{r}, t)$  entre  $t_0$  et  $t$  :

$$\phi_{acc}(\mathbf{r}, t) = \gamma \left[ \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t') dt' \right] \cdot \mathbf{r} = 2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (4.3)$$

avec

$$\mathbf{k} = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t') dt' \quad (4.4)$$

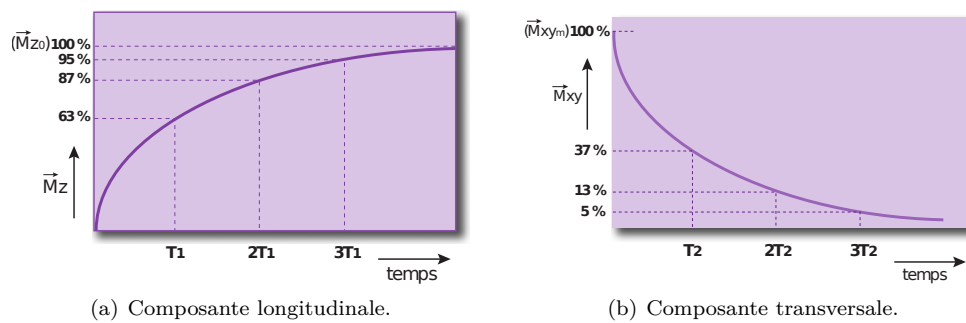
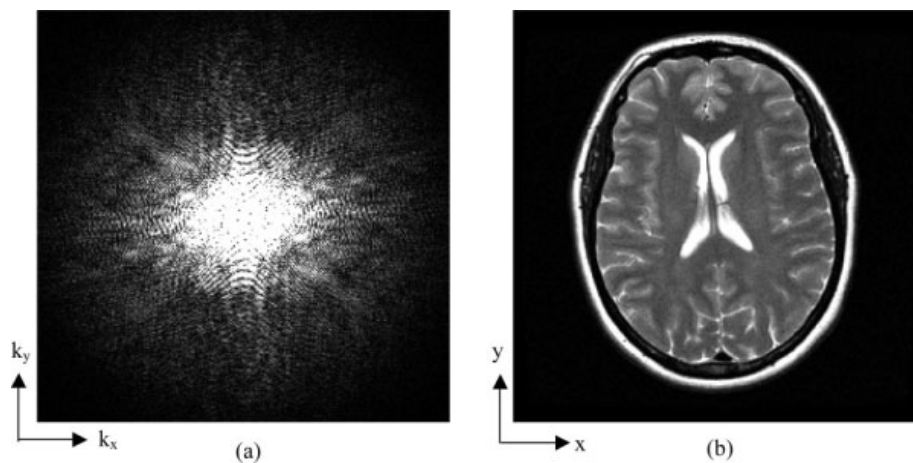
$$S(t) = \iiint \rho(x, y, z) e^{-i\omega_0 t - i\phi_{acc}} dx dy dz \quad (4.5)$$

$$= e^{-i\omega_0 t} \iiint \rho(\mathbf{r}) e^{-i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dx dy dz \quad (4.6)$$

$$= e^{-i\omega_0 t} S(\mathbf{k}) \quad (4.7)$$

Donc en jouant sur le gradient  $\mathbf{G}(t)$ , il est possible par simple mesure du signal  $S(t)$  par l'antenne réceptrice de créer une imagerie de  $S(\mathbf{k})$ , c'est à dire dans l'espace  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Or, on peut remarquer que  $S(\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier spatiale  $\rho(\mathbf{r})$ . Donc  $\rho(\mathbf{r}) = TF^{-1}(S(\mathbf{k}))$  ce qui permet à partir de l'imagerie dans l'espace- $\mathbf{k}$  d'obtenir une imagerie spatiale, comme dans la figure 4.6.

Le principe de l'IRM est ici décrit très succinctement. Une présentation plus approfondie peut être trouvée dans [11, 14-17].

Figure 4.5 – Temps de relaxation (configuration à  $90^\circ$ ), figure extraites de [11].Figure 4.6 – Passage grâce à une transformation de Fourier 2D de l'image en espace- $k$  (a) à une image spatiale (b), figure extraite de [13].

## 4.2.2 Électroencéphalographie

### Principe général

Les neurones ont été étudiés au début du  $xx^e$  siècle par Ramon y Cajal (prix Nobel de médecine en 1906 avec C. Golgi). Le rôle principal des neurones est de recevoir, propager, traiter et transmettre l'information. Un neurone est une cellule nerveuse que l'on peut décomposer schématiquement en deux parties :

- Les dendrites qui sont principalement les zones de réception des informations arrivant au neurone
- Les axones qui sont des extensions qui acheminent les influx nerveux générés vers les autres neurones.

La conduction de l'influx nerveux d'un neurone à un autre se fait par l'intermédiaire des contacts entre l'axone du neurone transmetteur (pré-synaptique) et la dendrite du neurone récepteur (post-synaptique), voir figure 4.7. Cette zone de contact est appelée synapse.

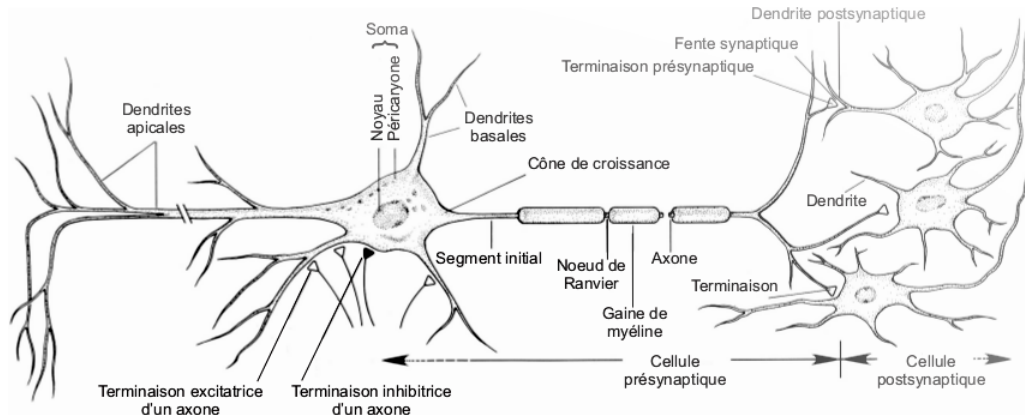


Figure 4.7 – Structure du neurone, extraite de [18].

La membrane du neurone, parties externe et interne, contiennent des ions de différents type qui sont essentiellement  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Cl^-$  et  $Ca^{+2}$ . Une différence de potentiel existe entre les milieux intra et extra cellulaires qui est due à une différence de composition ionique entre ces deux milieux. À l'équilibre, il existe une différence de potentiel entre le milieu extérieur et intérieur du neurone d'environ  $-60$  à  $-70\text{ mV}$  due à une différence de concentration ionique et à une perméabilité sélective de la membrane à certaines espèces d'ions. Les différences de concentration sont maintenues par les protéines de la membrane appelées pompes à ions, qui transportent ces ions contre leur gradient de concentration. Lorsque le neurone est excité à son extrémité, alors il y a ouverture de canaux de sodium ce qui va induire une perturbation des concentration ionique et donc la propagation d'un signal électrique le long de l'axone (l'un des premier modèle de ce phénomène a été modélisé par Hodgkin et Huxley [19]).

On différencie cette perturbation électrique en deux phénomènes distincts :

- Potentiel d'action (PA) : le PA est l'événement qui survient lorsque des échanges le long de l'axone neuronal. Il permet à un signal électrique de se propager rapidement le long de celui-ci à une vitesse allant de quelques mètres à quelques dizaines de mètres par seconde [18], pour une durée de 1 à 3 ms et une amplitude de 100 mV environ.
- Potentiel Post-Synaptique (PPS) : Les PPS sont, quant à eux, générés au niveau des synapses pour une amplitude initiale d'environ 10 mV. Bien que beaucoup plus faibles que les PA, les PPS ont une durée bien plus longue (de l'ordre de 20 ms) [18].

La différence significative des durées feront en sorte que les PPS, malgré leur plus faible amplitude, auront un impact plus important sur la mesure extérieure de l'activité électrique. Néanmoins, il faut aussi rappeler que le cerveau humain est constitué d'environ 100 milliards de cellules nerveuses. Le courant électrique parcourant un neurone isolé est complètement négligeable à l'échelle macroscopique l'ensemble de l'activité électrique du cerveau.

En réalité, les neurones sont organisés en réseau, en particulier dans le cortex, ce qui génère un signal électrique cohérent capable d'être perçu à travers le scalp humain, voir figure 4.8, par le biais d'électrodes en contact. En 1875, Richard Caton fut le premier à enregistrer l'activité électrique du cortex, attachant des électrodes aux hémisphères d'un cerveau d'animal, et montrant que le courant électrique pouvait changer en fonction du comportement [20]. Des années plus tard, Hans Berger (1873-1941), psychiatre allemand publia en 1929 "Encephalogram of man" et permit le passage de simples mesures de potentiels électriques à une électroencéphalographie (EEG) telle qu'on la connaît aujourd'hui [21]. L'acquisition des signaux de l'EEG est faite à l'aide des capteurs placés sur le scalp en des points dont le positionnement est normalisé, voir figure 4.9. Les électrodes permettent de mesurer la différence de potentiel, de l'ordre de grandeur de quelques unités à une centaine de  $\mu V$ , par rapport à un point de référence. Suivant le système cartographique choisi, le point de référence est soit le nasion (haut du nez) soit l'inion (point saillant à la base arrière du crâne). Il est à noter qu'un EEG s'accompagne généralement de signaux d'électrocardiographie ECG et d'électromyographie EMG.

Les oscillations corticales s'étendent sur des différentes bandes de fréquences allant de 0.25 Hz à environ 60 Hz pour un sujet sain. Chaque bande reflète un état de conscience ou même une tâche cognitive :

- Delta : avec de faibles fréquences ( $< 4$  Hz) et une forte amplitude.
- Thêta : qui s'étend sur une bande fréquentielle de 4 à 8 Hz.
- Alpha : cette onde qui oscille entre 8 et 12 Hz s'observe essentiellement lorsque le sujet est au repos.
- Bêta : entre 13 et 24 Hz , cette onde s'observe lorsque que le sujet est en alerte, lors d'un traitement de l'information c'est à dire au cours d'une veille attentive
- Gamma : avec des oscillations (autour de 40 Hz)

Il est à remarquer que ce que l'on appelle onde delta, onde bêta, etc. ne sont que des phénomènes d'oscillation dont la composante principale se situe dans ces différentes bandes.

### Conditions d'application courante

Même s'il est possible de réaliser des mesures EEG sur un individu dans n'importe quelle condition, il est intéressant pour des besoins de statistiques de placer l'étude dans une situation plus

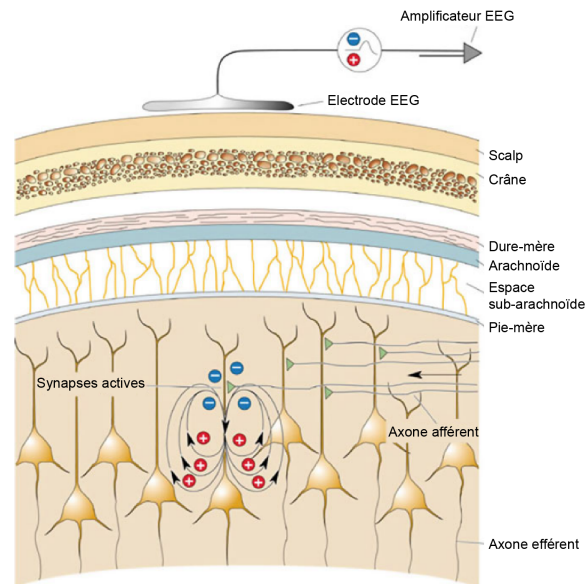


Figure 4.8 – Structure neuronale à proximité de l'électrode.

contrôlée. Par exemple, il est très courant de réaliser une étude EEG lors des périodes de sommeil. Il devient alors possible de comparer plus facilement les individus entre eux en particulier si l'on travaille sur des cycles de sommeil identifiés : stade 1 (transition éveil-sommeil), stade 2 (sommeil lent léger), stade 3 (sommeil lent profond) et sommeil paradoxal (période de rêve plus marquée). Le terme lent signifie une diminution générale de la fréquence.

Une autre approche qui permet de mieux contrôler les conditions expérimentales est de stimuler l'individu par un stimulus sonore, lumineux ou cognitif. La réaction cérébrale se fera alors très souvent identifiée par un pic positif ou négatif un certain temps après le stimulus. On appelle cela des potentiels évoqués que l'on note NXXX ou PXXX suivant que le pic est négatif ou positif, et XXX indiquera le temps moyen en *ms* où est reçu ce signal. On citera par exemple :

- La N100 : c'est une déflexion négative du signal qui apparaît aux alentours de 100 *ms* en réponse à un stimulus auditif. Cette activation est sensée refléter l'organisation du cortex auditif primaire
- La P300 : c'est une onde positive apparaissant entre 300 et 600 *ms* après la présentation d'un stimulus rare, par exemple un stimulus différent dans une grande série de stimuli identiques.

Des informations plus complètes sur l'EEG pourront être trouvées dans les références suivantes [18, 23, 24].

### 4.2.3 Magnétoencéphalographie

La magnétoencéphalographie MEG, tout comme l'EEG, cherche à mesurer l'activité électromagnétique cérébrale. La différence est que les capteurs ne mesurent plus une tension électrique mais un champ magnétique, de l'ordre du femtotesla ( $10^{-15} T$ ) (On rappellera que le champ magnétique

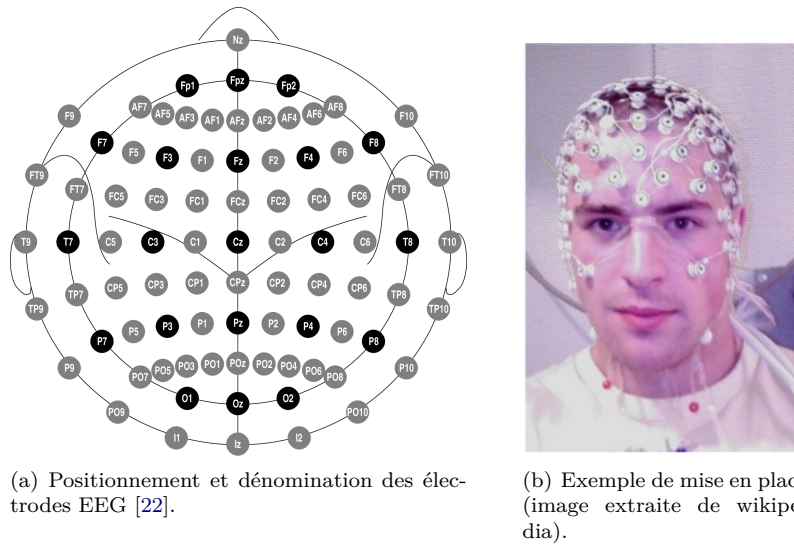


Figure 4.9 – Normalisation d'un système de mesures EEG cartographique.

terrestre est de l'ordre de  $0.3 \times 10^{-5} T$ ). Pour mesurer des champs magnétiques aussi faibles, on utilise des SQUID (Superconducting Quantum Interference Device). Ce sont encore actuellement parmi les dispositifs les plus sensibles disponibles pour mesurer l'intensité du champ magnétique. Son principe de fonctionnement repose sur l'effet Josephson dans un contexte de supraconductivité (très basse température).

## SQUID

A très basse température, certains matériaux peuvent acquérir des propriétés de supraconductivité, c'est à dire caractérisée par une résistance électrique nulle. Si un bloc supraconducteur est plongé dans un champ magnétique, il expulse les lignes de champ de telle sorte qu'elles ne pénètrent que d'une faible profondeur caractéristique du supraconducteur. C'est l'effet Meissner. Ces propriétés sont démontrées théoriquement par la théorie BCS, proposée en 1957 par John Bardeen, Leon Neil Cooper, et John Robert Schrieffer [25] qui considère des électrons regroupés par paires dites de Cooper.

Une application intéressante de la supraconductivité est le SQUID (dispositif d'interférence quantique supraconducteur). Un SQUID est un magnétomètre très sensible utilisé pour mesurer des champs magnétiques extrêmement faibles. Le fonctionnement du SQUID est basé sur des boucles supraconductrices contenant des jonctions Josephson. Une jonction de Josephson dont le comportement découle d'une prédiction théorique faite par B. D. Josephson dans un article publié en 1962 [26]. Dans l'article, Josephson décrit comment un supracourant peut circuler entre deux morceaux de supraconducteur séparés par une fine couche d'isolant. Ce phénomène est maintenant appelé l'effet Josephson. Le SQUID se compose d'une boucle de courant supraconducteur contenant deux jonctions Josephson, comme le montre la figure 4.10. Lorsque la boucle est placée dans un champ magnétique très faible, il y a un effet d'interférence qui va induire un courant dont l'intensité, relativement élevée compte tenu de la faible valeur du champ, nous fournit une valeur mesurable de



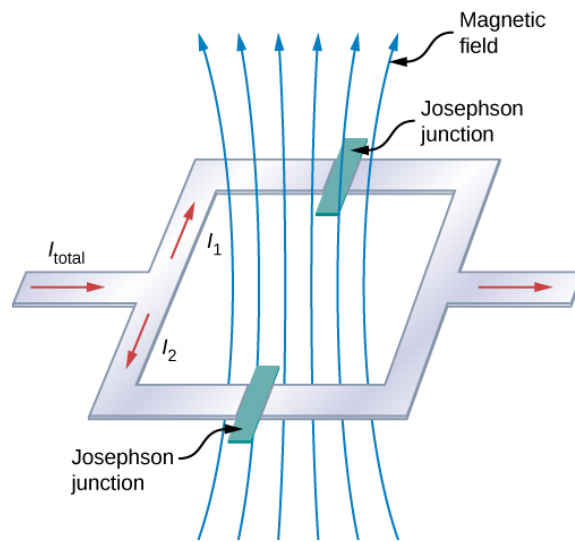


Figure 4.10 – Présentation schématique d'un SQUID.

l'intensité du magnétique. On trouvera dans la thèse de Veauvy [27] une description beaucoup plus complète et détaillée.

### Système de MEG

Un système de magnétoencephalographie se présente sous la forme d'un ensemble de capteurs SQUID, plongés dans un bain d'hélium liquide, entourant la tête d'un individu avec une répartition spatiale équivalente à celle de l'EEG.

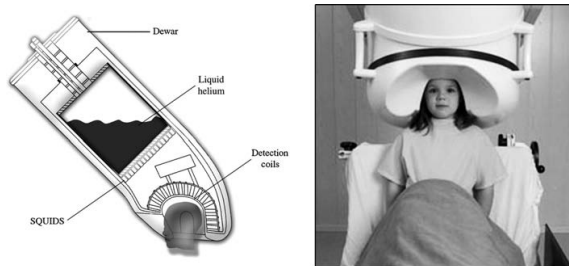


Figure 4.11 – Système de perception MEG, extrait de [28].

Il est important de souligner que pour des champs magnétiques aussi faibles, les mesures doivent être réalisées dans une pièce isolée magnétiquement par du  $\mu$ -métal, voir 4.12. Le  $\mu$ -métal est un alliage de nickel et de fer qui possède une très forte perméabilité magnétique (d'où lettre  $\mu$ ). La haute perméabilité du  $\mu$ -métal offre une faible réluctance face au flux magnétique, conduisant à

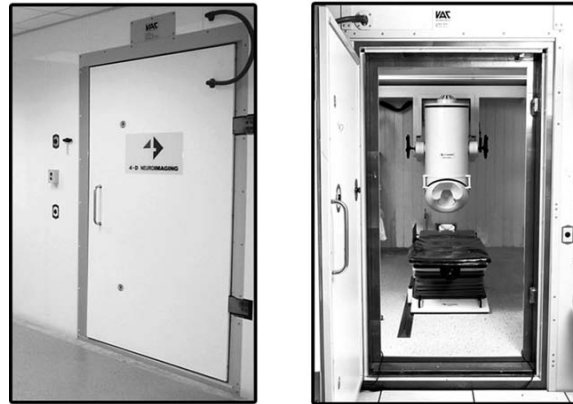


Figure 4.12 – Chambre blindée d’un système MEG, extrait de [28].

son utilisation dans les boucliers magnétiques contre les champs magnétiques statiques ou variant lentement. Au final, on peut enregistrer les signaux issus de ce système qui sont équivalent aux signaux EEG.

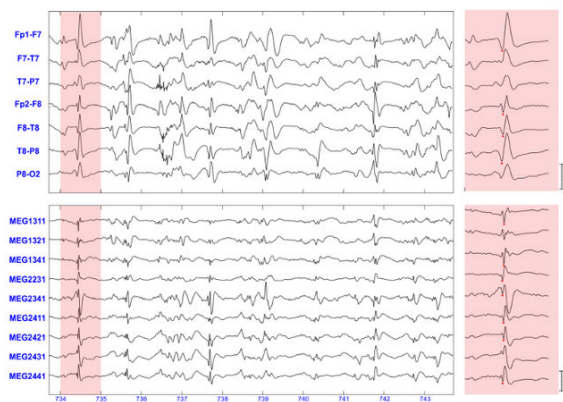


Figure 4.13 – Signaux EEG (partie supérieure) et MEG (partie inférieure).

La magnétoencéphalographie engendre un surcoût très important par rapport à de l’EEG classique. Son avantage est qu’elle évite grandement la distorsion du signal par la inhomogénéité cérébrale et qu’elle donne accès à des sources électromagnétiques plus profondes.

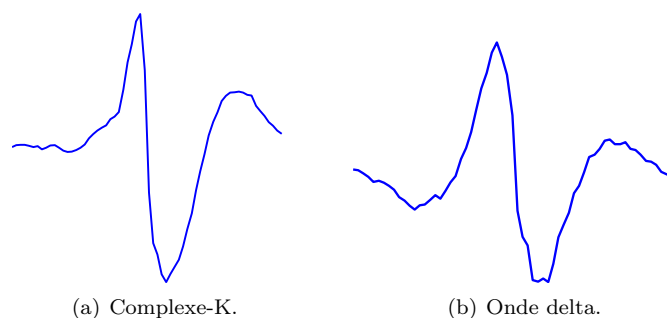


Figure 4.14 – Deux évènements physiologique proches.

### 4.3 Mes recherches

Dans le contexte de ce laboratoire de recherche bénéficiant de ces trois différents systèmes biomédicaux, mon activité de recherche consistait principalement à développer des outils de traitement du signal pour identifier certaines caractéristiques, notamment des phénomènes transitoires dans les différents enregistrements, expertisés ou non. Le développement de ces algorithmes avait pour objectifs d'aider aux traitements statistiques des données de neuropsychiatrie susceptibles de mettre en évidence une pathologie (schizophrénie par exemple) ou les effets de certaines substances psychotropes [29-32].

#### 4.3.1 Traitement du signal

Dans un premier temps, je me suis appuyé sur les méthodes classiques en traitement du signal afin de répondre le plus rapidement possibles aux besoins de l'activité recherche en neuroscience et en pharmacologie. Une de mes études les plus représentatives de cette démarche, a été de détecter un phénomène particulier appelé complexe-K [33]. C'est un phénomène dont la trace fluctue beaucoup selon les individus et, également sur une période de sommeil, chez un même individu. De plus, ils sont soumis à de nombreuses perturbations (artefacts électriques, mouvement du sujet etc...). Néanmoins, la description de ce phénomène a fait l'objet d'une littérature abondante, car il s'agit d'un marqueur important dans le processus de sommeil. En effet, le complexe-K est une oscillation particulière, voir figure 4.14(a), qui s'interprète le plus souvent comme une réponse cognitive à un stimulus externe ou interne. Un problème majeur provient de sa grande ressemblance avec un autre phénomène physiologique appelé onde delta, voir 4.14(b).

La classification entre onde delta et complexes-K est réputée être un problème de grande difficulté et entraînant de sérieuses contradictions entre les experts, cf. [34]. Ma démarche méthodologique a été de construire un classifieur automatique de complexes-K à partir de cotations de plusieurs experts humains, et en supposant le minimum d'a priori sur la structure des signaux à considérer (approche non-paramétrique).

**Données du problème** Afin de constituer un ensemble d'apprentissage significatif, nous avons fait coter visuellement, par 6 experts, les complexes-K enregistrés lors des nuits de sommeil de trois jeunes volontaires sains mâles. La détection doit s'effectuer, en accord avec les règles cliniques habituelles, sur une seule électrode posée au sommet du crâne (position centrale).

**Fusion des expertises** Malgré toutes ces précautions, nous avons pu constater une grande variabilité dans les avis des experts. Si un expert cote en moyenne 804 complexes-K pour les trois nuits, seulement 292 complexes-K ont été cotés par au moins quatre experts. Pour obtenir une fusion de l'avis de ces experts, des méthodes théoriques générales ont été développées, voir [35, 36]. D'une façon plus pragmatique, nous avons déterminé trois catégories : la première est constituée des phénomènes cotés par au moins trois experts (603 éléments). Cette catégorie regroupe des éléments que l'on peut qualifier presque sûrement de complexes-K. La deuxième catégorie est l'ensemble des éléments cotés par au moins un expert et ne relevant pas de la catégorie précédente. La deuxième catégorie est un ensemble ambigu de phénomènes physiologiques. Ces éléments ne seront pas pris en compte pour évaluer la performance du classifieur, et la catégorie 2 n'interviendra plus dans la suite de l'étude. Enfin, la dernière catégorie correspond aux phénomènes cotés par aucun des experts. Ces derniers éléments sont presque sûrement des non complexes-K (principalement des ondes delta).

**Présélection** L'ensemble des complexes-K cotés par tous les experts nous permet de calculer un complexe-K moyen sur une fenêtre temporelle de 2 secondes. Par un filtrage linéaire classique adapté à ce complexe-K moyen, et en choisissant le seuil minimal permettant de retenir l'ensemble des éléments de la première catégorie, on présélectionnera en plus des complexes-K (603 éléments de la première catégorie) 14751 non complexes-K (3ème catégorie) sur les 3 nuits enregistrées. Après cela, on dispose, pour chaque élément de signal présélectionné, complexe-K ou non, d'un vecteur de 64 valeurs (2s échantillonné à 32 Hz).

**Représentation temps-fréquence** Les études précédentes dans le domaine de la détection automatique de complexes-K, se sont fondées sur l'identification paramétrique des formes d'ondes ou sur des traitements linéaires des signaux temporels [37-41]. Les performances des classifieurs ainsi obtenus étaient soit très médiocres, soit estimées à partir de données sélectionnées et incompatibles avec la réalité clinique des enregistrements sommeil. Par ailleurs, une pré-étude [42] a montré l'intérêt des représentations temps-fréquence pour améliorer la discrimination entre les complexes-K et les ondes delta. Nous avons donc cherché à utiliser la représentation temps-fréquence des éléments des classes plutôt que directement le signal temporel pour discriminer les complexes-K des non complexes-K. Concrètement, à un signal temporel échantillonné  $s(k)$ , on associe sa transformée de Wigner-Ville discrète  $W_s(k, f_j)$  donné par :

$$W_s(k, f_j) = 2 \sum_{\tau=-N}^N R_s(k, \tau) \cdot e^{-i4\pi f_j \tau} \quad (4.8)$$

avec  $R_s(k, \tau) = s(k + \tau) s^*(k - \tau)$ . La transformée de Wigner-Ville discrète associe donc à un vecteur de 64 valeurs une image de  $64 \times 64$  soit 4096 points. La classification se fera sur ces éléments de 4096 valeurs. A titre d'exemple, on comprend intuitivement qu'il est plus difficile de distinguer les deux signaux temporels représentés sur la figure 4.14 que leur transformées de Wigner-Ville données par la figure 4.15.

Il aurait pu être envisagé de choisir une transformée temps-fréquence plus sophistiquée (pseudo Wigner-Ville lissée, transformée de la classe de Cohen, etc...) pour améliorer la lisibilité dans l'espace temps-fréquence. Il faut toutefois rappeler que l'objectif premier de cette représentation temps-fréquence n'est pas ici une extraction paramétrique d'information, mais est l'amélioration de la "séparabilité" statistique de deux classes données. L'avantage de la transformée de Wigner-Ville

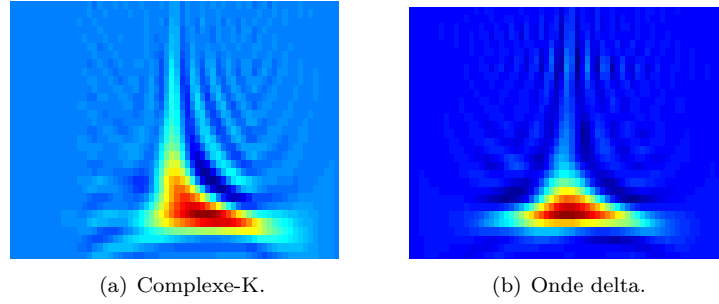


Figure 4.15 – Deux transformée de Wigner-Ville.

simple est qu'elle n'élimine pas d'information a priori dans le domaine temps-fréquence, contrairement à ce que pourrait entraîner un lissage.

**Classifieur linéaire optimal en temps-fréquence** Pour discriminer les transformées de Wigner-Ville des deux classes, nous avons cherché à construire un filtre linéaire optimal dans le domaine temps-fréquence. On peut faire la remarque qu'un classifieur linéaire dans le domaine temps-fréquence est équivalent à un classifieur quadratique dans le domaine temporel, le temps et la fréquence étant supposés continus, voir [43]. Toutefois, le fait de considérer un filtre linéaire dans le domaine temps-fréquence nous permet de bénéficier d'une meilleure interprétabilité des résultats. Pour l'élaboration d'une structure de détection linéaire, une approche classique consiste à maximiser un critère de contraste donné. Se pose dans ce cas, le choix a priori d'un critère de contraste. Il est toujours possible de choisir un critère communément admis, par exemple le critère de Fisher, voir [44]. Cependant, l'optimisation par rapport à ce critère ne garantit en rien une séparabilité réelle des populations statistiques, voir [45]. La pertinence d'un critère de contraste dépend étroitement de la distribution des classes à séparer. Enfin, un problème plus pratique se pose également : l'optimisation des nombreux paramètres de la statistique de détection (4096) demande une puissance de calcul importante. Pour résoudre ces problèmes, Fukunaga [46] a introduit, dans le contexte de la reconnaissance de forme, une méthode permettant d'optimiser un détecteur linéaire pour une classe étendue de critère de contraste.

On note  $H_0$  et  $H_1$  les hypothèses selon laquelle la transformée de Wigner-Ville correspond respectivement à un complexe-K et à un non complexe-K. La classification linéaire des transformées de Wigner-Ville (images de  $64 \times 64$  points) se décrit alors synthétiquement :

$$\begin{cases} \text{Si } \lambda_{TF} = \sum_{k=1}^{64} \sum_{j=1}^{64} g(k, f_j) W_s(k, f_j) \geq \nu & \text{alors } H_0 \\ & \text{sinon } H_1 \end{cases} \quad (4.9)$$

que l'on peut noter :

$$\lambda_{TF}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{Y} \quad (4.10)$$

où

$$\mathbf{Y} = [W_s(1, f_1), \dots, W_s(1, f_{64}), \dots, W_s(64, f_1), \dots, W_s(64, f_{64})]^T \quad (4.11)$$

$$\mathbf{V} = [g(1, f_1), \dots, g(1, f_{64}), \dots, g(64, f_1), \dots, g(64, f_{64})]^T \quad (4.12)$$

et  $\nu$  est le seuil de détection. La construction du filtrage linéaire consiste à trouver les composantes  $g(k, f_j)$  du vecteur  $\mathbf{V}$  optimal au regard du critère de contraste retenu. En posant  $\eta_0$  (resp.  $\eta_1$ ) et  $\sigma_0$  (resp.  $\sigma_1$ ) les moments statistiques d'ordre un et deux du classifieur linéaire  $\lambda_{TF}$  conditionnellement à l'hypothèse  $H_0$  (resp.  $H_1$ ), on a :

$$\eta_i = E \{ \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{Y} - \nu | H_i \} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{M}_i - \nu \quad (4.13)$$

$$\sigma_i = \mathbf{V}^T E \left\{ (\mathbf{Y} - \mathbf{M}_i) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{M}_i)^T | H_i \right\} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \Sigma_i \mathbf{V} \quad (4.14)$$

où, conditionnellement à  $H_0$  et  $H_1$ , les vecteurs moyens sont  $\mathbf{M}_i = E \{ \mathbf{Y} | H_i \}$ , et les matrices de covariance  $\Sigma_i = E \left\{ (\mathbf{Y} - \mathbf{M}_i) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{M}_i)^T | H_i \right\}$ . Fukunaga a alors démontré analytiquement que : si le critère de contraste dépend uniquement des moments d'ordre un et deux du classifieur linéaire ( $\eta_0, \eta_1, \sigma_0$  et  $\sigma_1$ ), alors le vecteur optimal  $\mathbf{V}_{opt}$  est de la forme :

$$\mathbf{V}_{opt} = [\alpha \Sigma_0 + (1 - \alpha) \Sigma_1]^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0) \quad (4.15)$$

et

$$\alpha = \frac{\partial C / \partial \sigma_0^2}{\partial C / \partial \sigma_0^2 + \partial C / \partial \sigma_1^2} \quad (4.16)$$

où  $C(\nu_0, \nu_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2)$  est le critère de contraste,  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  sont les matrices de covariance,  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{M}_1$  les vecteurs des moyennes associées respectivement aux éléments de la classe des complexes-K et de celle des non complexes-K. Sous certaines conditions peu contraignantes pour les critères de contraste considérés ( $\partial C / \partial \sigma_0^2$  et  $\partial C / \partial \sigma_1^2$  de même signe), le paramètre est une valeur comprise entre 0 et 1. On doit noter que les critères de contraste pris en compte par ce résultat forment un large ensemble. Et, les critères de contraste les plus usuels, comme celui de Fisher, appartiennent à cet ensemble. A titre d'exemple, l'expression du critère de Fisher est :

$$C_{Fisher} = (\nu_0 - \nu_1)^2 / (P_0 \sigma_0^2 + (1 - P_0) \sigma_1^2) \quad (4.17)$$

où  $P_0$  est la probabilité a priori de l'hypothèse  $H_0$ . Par ailleurs, il est également remarquable que le vecteur optimale  $\mathbf{V}_{opt}$  soit défini à une valeur scalaire  $\alpha$  près.

Dans ces conditions, il devient possible de s'affranchir de la notion de critère de contraste. Pour chaque valeur de  $\alpha$ , on peut déterminer un classifieur, dont on estime ses performances en terme de taux de bonne détection par rapport au taux de fausse alarme (courbe ROC). Le choix final en faveur d'une structure de décision se fait en fonction des objectifs que l'on s'est fixés. Dans notre cas, nous retenons le détecteur minimisant le taux de fausse alarme pour un taux de bonne détection fixé (95%).

**Réduction de complexité** A première vue, la présentation que nous venons de faire, laisserait supposer que le problème de la détermination du classifieur optimal à partir de données expertisées est, à présent, résolu. En réalité, le classifieur que nous avons précédemment construit, est destiné à détecter des complexes-K sur les enregistrements sommeil de n'importe quel sujet. Il faut donc s'assurer de la robustesse de notre classifieur. Ce dernier ne doit pas être trop dépendant des particularités de l'ensemble d'apprentissage. Il est en particulier connu, voir [47, 48], que plus un système de décision possède de degrés de liberté, dont le nombre est formellement défini par la dimension de Vapnik-Chervonenkis, plus la taille de l'ensemble d'apprentissage doit être significative. Dans le cas

présent les transformées de Wigner-Ville correspondent à des images de 4096 ( $64 \times 64$ ) points. On peut démontrer que tous ces points ne sont pas linéairement indépendants et que la dimension réelle du système est de 1087, voir [49, 50]. Cette complexité reste tout de même très élevée, et il est irréaliste de penser obtenir un ensemble d'apprentissage suffisamment conséquent à partir de données cliniques : une technique de régulation de la complexité du problème s'avère nécessaire pour que le classifieur que nous cherchons à construire, soit robuste. Une méthode, appelée Optimal Brain Damage (OBD), adaptée par Richard [51], aux classifieurs linéaires, apporte une solution à cette nécessité de contrôler la complexité. Cette approche nécessite des données indépendantes de celles utilisées pour l'apprentissage proprement dit. Dans notre cas, nous avons constitué cet ensemble à partir des enregistrements sommeils de trois nouveaux jeunes volontaires sains mâles. D'après la méthodologie précédemment décrite, pour chaque valeur de  $\alpha$  nous construisons un classifieur linéaire ayant pour vecteur  $\mathbf{V}_\alpha$  :

$$\mathbf{V}_\alpha = [\alpha \Sigma_0 + (1 - \alpha) \Sigma_1]^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0) \quad (4.18)$$

La méthode (OBD) utilise une décomposition en vecteurs et en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{Mat}_\alpha = [\alpha \Sigma_0 + (1 - \alpha) \Sigma_1]^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0)$ . En diagonalisant cette matrice et en annulant les valeurs propres de rang strictement supérieur à  $n_\alpha$ , nous obtenons une nouvelle matrice  $\mathbf{Mat}_{(n_\alpha, \alpha)}$  et donc un nouveau filtre linéaire  $\mathbf{V}_{(n_\alpha, \alpha)}$  :

$$\mathbf{V}_{(n_\alpha, \alpha)} = \mathbf{Mat}_{(n_\alpha, \alpha)} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0) \quad (4.19)$$

La valeur du rang  $n_\alpha$  est obtenu, pour chaque valeur de  $\alpha$ , en minimisant, sur l'ensemble test, le taux de fausse alarme à un taux de bonne détection fixé (95%) du classifieur construit avec  $\mathbf{V}_{(n_\alpha, \alpha)}$ .

**Estimation des performances** Pour être tout à fait rigoureux, l'estimation des performances du classifieur a été déterminée à partir d'un troisième ensemble de données décorrélé de l'ensemble d'apprentissage et de l'ensemble test. Ce troisième ensemble a été obtenu, d'une manière identique aux deux premiers ensembles, à partir des enregistrements sommeil de trois nouveaux volontaires sains.

Même s'il est toujours délicat de comparer des performances sur des données différentes, la figure 4.16 semble tout de même indiquer une amélioration importante par rapport aux travaux précédents, voir [38, 41, 52]. Aux points de fonctionnement proposés dans ces articles, on constate que notre classifieur offre des taux de fausse alarme nettement réduit.

### 4.3.2 Approche modélisation

L'approche traitement du signal m'a permis de créer des outils permettant l'analyse des signaux provenant des différents systèmes de FORENAP. Ces outils de traitement ont été utiles pour l'analyse statistique des données notamment pour identifier des pathologies psychiatriques mais également pour quantifier l'effet de certains médicaments psychotropes. Néanmoins, je ne trouvais pas cette démarche très satisfaisante dans la mesure où les algorithmes de traitement du signal ne semblaient qu'extraire des formes "patterns" sans réellement faire un lien direct avec l'activité électrique du cerveau. Je recherchais davantage une voie donnant accès à cette activité cérébrale en utilisant une modélisation électromagnétique. C'est ce questionnement qui m'a poussé à m'intéresser de près aux travaux de Pascual-Marqui [53] qui, par une modélisation du problème direct et le traitement du problème inverse, était en mesure d'établir une cartographie 3D, même imprécise,

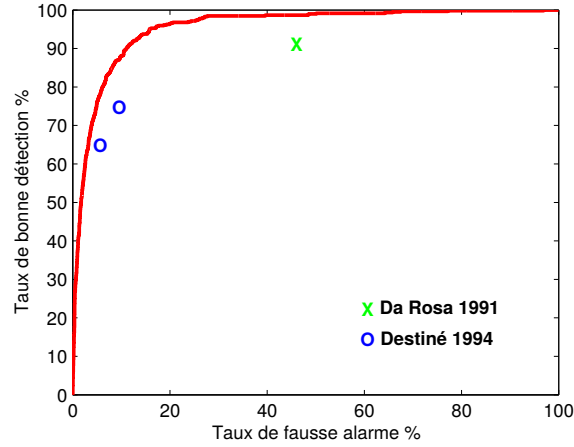


Figure 4.16 – Courbe ROC du classifieur.

de l'activité électromagnétique du cerveau à partir des mesures MEG ou EEG. Cette démarche était beaucoup plus en phase avec mes aspirations et mon goût pour les modèles physiques comme moyens de représentation de l'information.

### Le problème direct

Qu'il s'agisse des mesures EEG et MEG, les fréquences enregistrées ne dépassent pas quelques  $KHz$  et le domaine réel d'intérêt se situe entre  $0.1$  et  $100 Hz$ , donc il est tout à fait légitime de considérer les équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans leur approximation quasi-statique, c'est à dire  $\partial \mathbf{E}/\partial t$  et  $\partial \mathbf{B}/\partial t$  comme nuls. Ceci nous donne :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.23)$$

Sous ces conditions, on a que le vecteur  $\mathbf{E}$  est irrotationnel et qu'il dépend donc d'un potentiel scalaire  $V$  tel que  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . On décompose en général le vecteur courant  $\mathbf{J}$  en un courant primaire, source neuronale,  $\mathbf{J}^p$  et en un courant induit  $\mathbf{J}^v = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla v$  dans le volume de la tête. En prenant la divergence de  $\mathbf{J}$ , nous obtenons :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (4.24)$$

Or, en reprenant les approximations quasi-statiques des équations de Maxwell et en prenant la divergence de l'équation 4.23, il vient que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . D'où la relation :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (4.25)$$



**Modèle de source** La façon la plus classique pour modéliser les sources neuronales de courant primaire, est de les considérer comme un ensemble discret de dipôles de courant, sources ponctuelles, de la forme :

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.26)$$

où  $\mathbf{q}$  est le moment dipolaire,  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac et  $\mathbf{r}_0$  la position de la source.

**Modèle de tête uniforme** Un modèle de tête simpliste consiste à considérer un  $\sigma$  constant. Sous cette hypothèse, nous avons que  $\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \sigma \Delta V$  et le problème revient à résoudre l'équation de Laplace pour un dipôle de courant situé en  $\mathbf{r}_0$  :

$$\Delta V = \frac{1}{\sigma} \mathbf{q} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.27)$$

En rappelant que la fonction de Green, en champ libre,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  de l'équation de Laplace est  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -1/4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ , la solution est alors [54] :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int \mathbf{q} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' = -\frac{\mathbf{q}}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \quad (4.28)$$

De la même façon, on peut montrer que seul le courant primaire apporte une contribution au champ magnétique et que ce champ est donné par [54] :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \quad (4.29)$$

**Modèle des trois sphères** Le modèle de tête uniforme n'est pas vraiment acceptable car il ne prend absolument pas en compte l'hétérogénéité même grossière d'une tête humaine. En particulier, la conductivité du scalp, des os du crâne et de la matière cérébrale ont des conductivités très différentes ce qui implique des discontinuités fortes à l'intérieur de la tête. En 1993, Munck [55] montra, en utilisant des séries de polynômes de Legendre, qu'il était possible de déterminer une solution analytique pour une configuration de N-sphères concentriques, voir figure 4.17. Le dipôle est situé en  $\mathbf{r}_0$ , son moment dipolaire est noté  $\mathbf{p}$  et le potentiel est observé en  $\mathbf{r}$ . On notera  $\alpha$  l'angle entre  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}$ . On notera également  $\hat{\mathbf{n}}_0$  et  $\hat{\mathbf{n}}_r$  respectivement les vecteurs  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}$  normalisés. Les listes  $\{R_1, \dots, R_N\}$  et  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  sont respectivement les rayons des sphères et les conductivités des milieux délimités par les sphères.

L'expression du potentiel  $V(\mathbf{r})$  prend alors la forme suivante :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{p} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}_0 (S_1 - \cos \alpha S_0) + \hat{\mathbf{n}}_r S_0\} \quad (4.30)$$

avec

$$S_0 = \frac{1}{\|\mathbf{r}_0\|} \sum_{j=1}^N (2j+1) R_j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) P_j'(\cos \alpha) \quad (4.31)$$

et

$$S_1 = \sum_{j=1}^N (2j+1) R_j'(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) P_j(\cos \alpha) \quad (4.32)$$

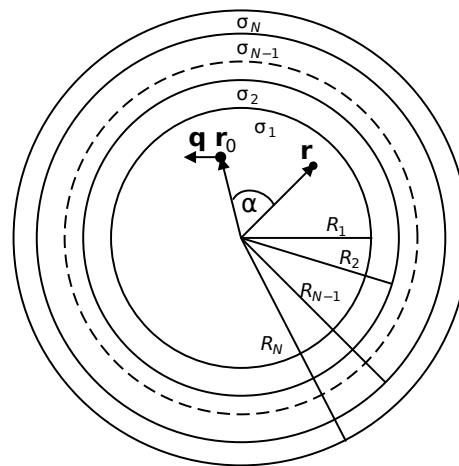


Figure 4.17 – Configuration N-sphères concentriques, extrait de [56].

où  $P_j$  sont les polynômes de Legendre et  $P'_j$  leur dérivée.  $R_j(\cdot)$  sont des fonctions dépendant de la position du dipôle et de l'observateur et  $R'_j(\cdot)$  la dérivée par rapport à la première variable. En 1994, Berg [57] appliqua cette solution analytique à une tête humaine en distinguant le scalp, le crâne et le cerveau par trois sphères, voir figure 4.18. C'est cette modélisation du problème direct qu'a repris Pascual-Marqui dans son modèle de tomographie LORETA (Low Resolution Electromagnetic Tomography).

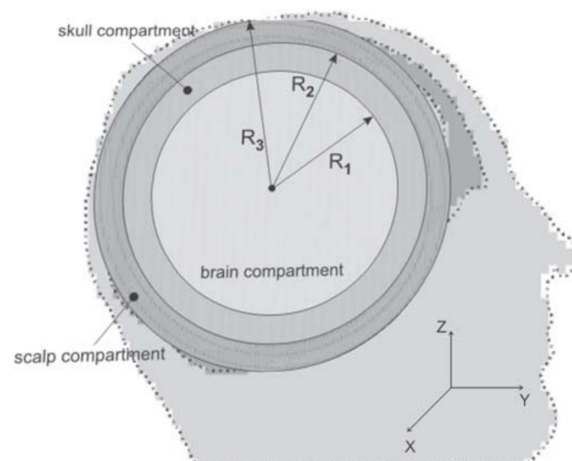


Figure 4.18 – Configuration géométrique du modèle des trois sphères adapté à une tête humaine, extrait de [58].

**Modèle de tête réaliste** Si l'on veut obtenir un modèle encore plus réaliste du potentiel au sein d'une tête, il devient très difficile d'obtenir une solution analytiques. Il faut dans ce cas passer à des approches numériques. Les méthodologies numériques plus classiques sont les méthodes des éléments finis, voir par exemple [59, 60], et les méthodes d'éléments d'intégrales de frontières, cf. [61, 62].

### Le problème inverse

Que l'on considère un modèle simpliste ou un modèle réaliste complexe, la modélisation du problème direct reste, sauf exception, linéaire et se ramène toujours formellement à :

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \quad (4.33)$$

où  $\mathbf{D}$  est un vecteur contenant les mesures EEG ou MEG,  $\mathbf{J}$  un vecteur décrivant les dipôles et  $\mathbf{L}$  un opérateur matriciel. Dans le cas de LORETA, on considère une distribution dépassant le millier de dipôles répartis dans le cerveau et pour chaque position le dipôle est décomposé en 3 composantes ( $J_x, J_y, J_z$ ). La dimension du vecteur  $\mathbf{J}$  est donc de  $3 \times$  nombre de dipôles. Le nombre de mesures électriques ou magnétiques à la surface de la tête ne dépassent pas quelques dizaines. Le problème linéaire (4.33) est donc nécessairement mal-posé. En réalité, le caractère mal-posé du problème n'est pas seulement une question de dimension. La proximité des dipôles, particulièrement en zone profonde, implique que le conditionnement de la matrice  $\mathbf{K}$  est très mauvais. En conclusion, une localisation des sources, c'est à dire la détermination d'un vecteur  $\mathbf{J}$ , nécessite une méthode de régularisation efficace.

**Régularisation de Tikhonov** Un système linéaire  $\mathbf{y} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}$  mal-posé peut être traité par la technique de régularisation de Tikhonov (ou solution par norme minimum standard - MNE pour Minimum Norm Estimation) qui considère le problème d'optimisation dont la solution dépendant d'un paramètre et correspondant à un pseudo-inverse :

$$\mathbf{x}_\lambda = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (4.34)$$

où  $\lambda$  est un paramètre scalaire de régularisation. On montre alors que la solution est unique et s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{y} = \mathbf{L}^T (\mathbf{L}^T \mathbf{L} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \quad (4.35)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Cette technique de régularisation pourrait être appliquée dans notre cas, néanmoins la solution n'est pas la plus pertinente dans la mesure les composantes de  $\mathbf{J}$  sont considérées a priori comme indépendantes. De plus cette méthode pénalise de façon équivalente chaque dipôle du modèle distribué. Or les dipôles plus profonds, typiquement ceux positionnés au fond d'un sillon, produisent moins d'effets du point de vue du problème direct. Plus les sources sont proches des capteurs, plus le champ magnétique mesuré par ces derniers est grand même sous l'effet d'une petite activation. Pour répondre, du moins en partie, à toutes ces difficultés, on considère le problème d'optimisation généralisé suivant :

$$\mathbf{x}_\lambda = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{W} \cdot \mathbf{x}\|_2^2 \quad (4.36)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice de pondération dans le terme de régularisation. Dans ce cas, la solution sera de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L} + \lambda \mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{y} \quad (4.37)$$

L'objectif est alors de construire un opérateur  $\mathbf{W}$  pertinent. C'est la démarche suivie par exemple dans [63, 64].

**Régularisation de LORETA** Pour développer sa méthode de régularisation, Pascual-Marqui a considéré qu'il fallait chercher une solution de  $\mathbf{D} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}$  (avec  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times 3m}$  et  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3m \times 1}$ ) qui lisse le comportement d'un dipôle avec ceux de ces voisins. Pour cela, il a considéré le problème d'optimisation suivant :

$$\tilde{\mathbf{J}} = \underset{\mathbf{J}}{\operatorname{argmin}} \{ \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \} \quad \text{avec la contrainte} \quad \mathbf{D} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \quad (4.38)$$

où  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3m \times 3m}$  est une matrice de pondération dans le terme de régularisation. La solution  $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$  de ce problème d'optimisation est tel que :

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T [\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T]^\oplus \quad (4.39)$$

où  $\oplus$  indique le pseudo-inverse de Moore-Penrose.

On note  $l_{ijx}$  (resp.  $l_{ijy}$  et  $l_{ijz}$ ) la composante de l'opérateur  $\mathbf{L}$  reliant le capteur au point  $i$  et le dipôle situé au point  $j$  orienté selon l'axe  $Ox$  (resp.  $Oy$  et  $Oz$ ). On note aussi  $\mathbf{l}_{ij}$  le vecteur dont les composantes sont  $l_{ijx}$ ,  $l_{ijy}$  et  $l_{ijz}$ .

Le choix qui a été fait, dans le cas de LORETA, est de prendre pour la matrice  $\mathbf{W}$  une combinaison d'un opérateur de pondération diagonal et de l'opérateur de Laplace discrétisé qui va moyenner les comportements des zones voisines :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{I}_3) \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{B} \cdot (\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{I}_3) \quad (4.40)$$

où  $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice identité de dimension 3,  $\otimes$  est le produit de Kronecker et  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est l'opérateur de pondération diagonal défini par :

$$\Omega_{jj} = \sqrt{\sum_{i=1}^n l_{ij}^T \mathbf{l}_{ij}} \quad \text{pour } j = 1 \cdots m \quad (4.41)$$

$l_{ij}$  étant les composantes de la matrice  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3m \times 3m}$  la matrice de rigidité (stiffness matrix) de l'opérateur de Laplace discrétisé.

$$\mathbf{B} = \frac{6}{d^2} (\mathbf{A} - \mathbf{I}_{3m}) \quad (4.42)$$

avec  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{I}_3$ .

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I}_m + [\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1 \mathbf{1}_m)]^{-1} \right) \mathbf{A}_1 \quad (4.43)$$

$$[\mathbf{A}_1]_{ij} = \begin{cases} 1/6 & \text{si } \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.44)$$

où  $\mathbf{v}_i$  est la position du  $i$ -ième dipôle,  $d$  est la distance minimale entre deux positions de dipôles différentes et  $\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1 \mathbf{1}_m)$  est la matrice dont la diagonale est le vecteur  $\mathbf{A}_1 \mathbf{1}_m$  ( $\mathbf{1}_m$  est un vecteur dont les éléments sont égaux à 1 et de dimension  $m$ ). Cette solution correspond aux travaux de Pascual-Marqui dans son article [53]. En 2002, il a proposé une solution un peu différente [65] appelée méthode LORETA standardisée dans laquelle la matrice de pondération est telle que  $\mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1/2}$ ,  $\mathbf{C}$  étant une matrice de covariance des sources connues ou estimées.

**Autres approches** Il m'est impossible de résumer en quelques lignes la description des autres approches permettant la localisation des sources de l'activité cérébrale tant la littérature scientifique est abondante sur ce domaine. Je me permets néanmoins de citer quelques approches qui ne cherchent pas à déterminer une distribution de sources mais qui cherchent à mettre en évidence des composantes principales. On citera par exemple la méthode Multiple Signal Classification (MUSIC) ou sa version récursive RAP-MUSIC [66]. Il faut aussi citer des approches utilisant les séparations de sources [67] et les techniques bayésiennes [68].

### Représentation graphique

La détermination, ou du moins l'estimation, des sources d'activité cérébrale permet d'apporter une information. Toutefois, il faut aussi considérer la visualisation de cette information pour la rendre directement intelligible. Dans le cadre de LORETA, on utilise classiquement l'atlas de Talairach [69, 70]. Il s'agit d'un atlas d'imagerie IRM d'une femme de 60 ans distribué en open-source dont la géométrie est parfaitement connue et dont les zones cérébrales ont été labellisées, voir figure 4.19. Avec cet atlas, il devient possible de représenter graphiquement les sources de courant dans un référentiel connu par l'ensemble de la communauté.

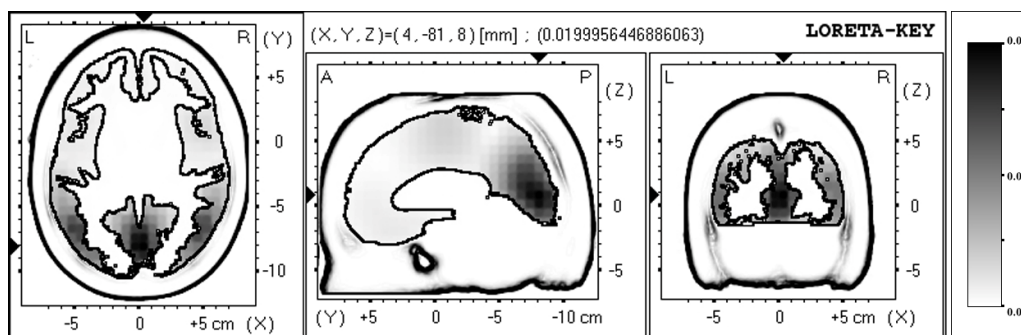


Figure 4.19 – Image extraite de l'atlas de Talairach.

### Application

En utilisant le cadre théorique de LORETA, il devient alors possible d'étudier et de représenter l'activité cérébrale d'un certain nombre d'individus à partir de mesure EEG ou MEG en fonction de critères physiologiques, pathologiques ou pharmacologiques. En ajoutant un système de banc de filtres fréquentiels correspondant aux ondes Delta, Theta, Alpha et Bêta, il m'a été possible de réaliser une étude de faisabilité pour étudier la localisation de l'activité cérébrale pendant les phases de sommeil (sommeil paradoxal, sommeil profond et sommeil léger) à partir d'EEG (21 électrodes) issues de chez un groupe de 19 jeunes adultes mâles sains en considérant pour chacun un maillage de  $3 \times 2394$  dipôles [31, 71]. J'ai pu également dans une autre étude réaliser une étude comparée entre un groupe d'individus témoins et d'individus traités à la fluvoxamine (antidépresseur)[72]. Sur les graphiques 4.20, 4.21 et 4.22, le niveau de couleur représente la valeur du test statistique de student (T-value) positif (en rouge) ou négatif (en bleu). En 2002, ces travaux ont d'ailleurs été jugés significatifs par l'équipe de Pascual-Marqui qui les a cités dans son article de revue [73].

En 2005, mes anciens collègues ont proposé une nouvelle étude en localisation de sources par mesure MEG et en appliquant cette fois-ci la méthode de LORETA standardisée [74]. Afin de montrer les progrès continus en termes de qualité de représentation graphique et d'algorithme de localisation LORETA, je citerai aussi cette étude de 2018 produite par l'équipe de Pascual-Marqui [75] sur l'effet de la privation de sommeil.

#### 4.3.3 Quelques compléments

L'approche physique et numérique présentée ici (LORETA) peut sembler restreinte au cadre biomédical de la modélisation de l'activité cérébrale. En réalité, cette approche physique trouve de nombreuses similitudes avec les différentes études, identifiées sous le terme générique de Distributed Point Source Method (DPSM), développées par Dominique Placko et Tribikram Kundu dans leur livre [76] et qui regroupent des applications dans des domaines très différents comme l'acoustique ou l'électromagnétisme industriel. Cette approche DPSM rentre elle-même dans le cadre encore plus général que sont les méthodes dites Meshfree [77, 78].

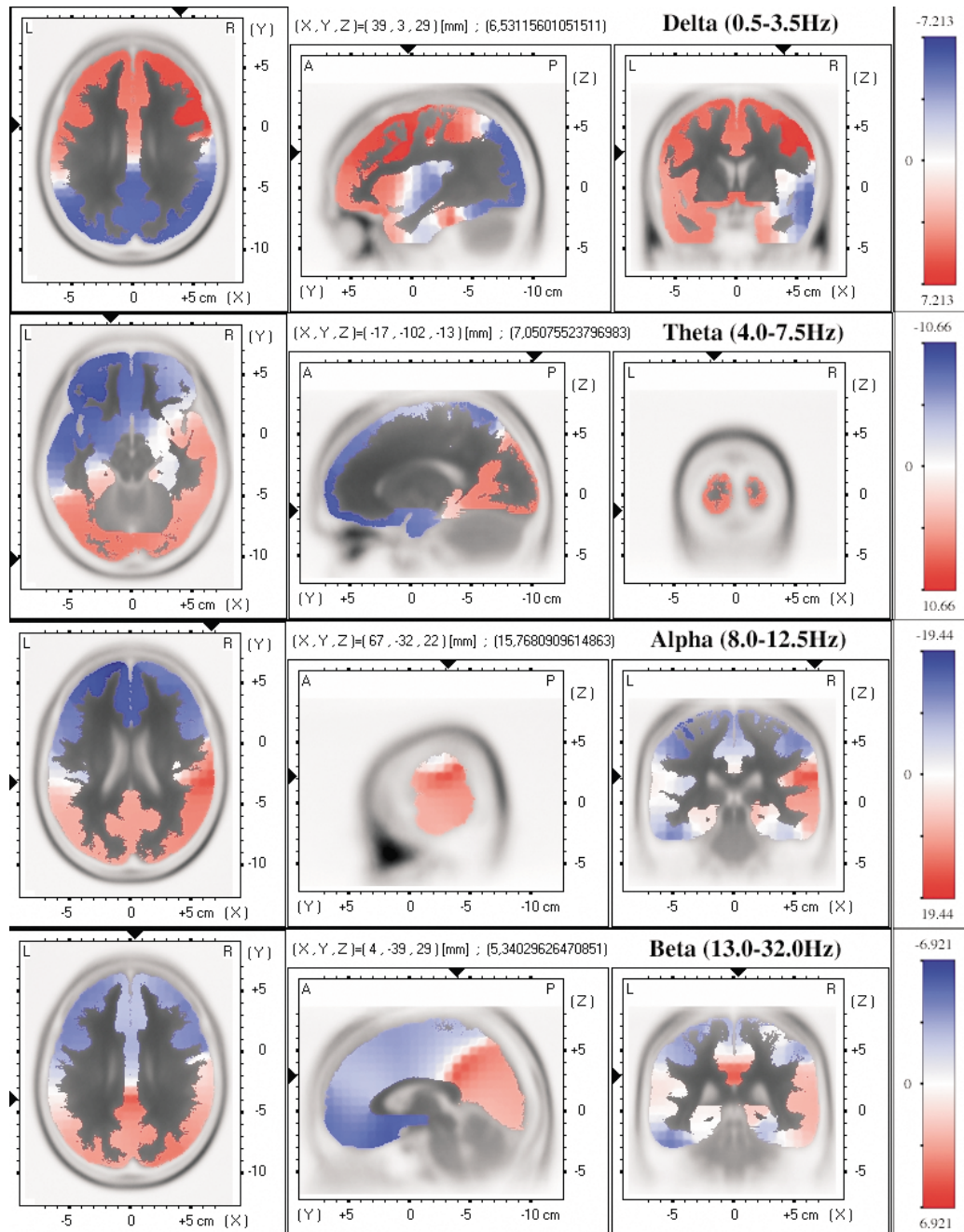


Figure 4.20 – Sommeil paradoxal.

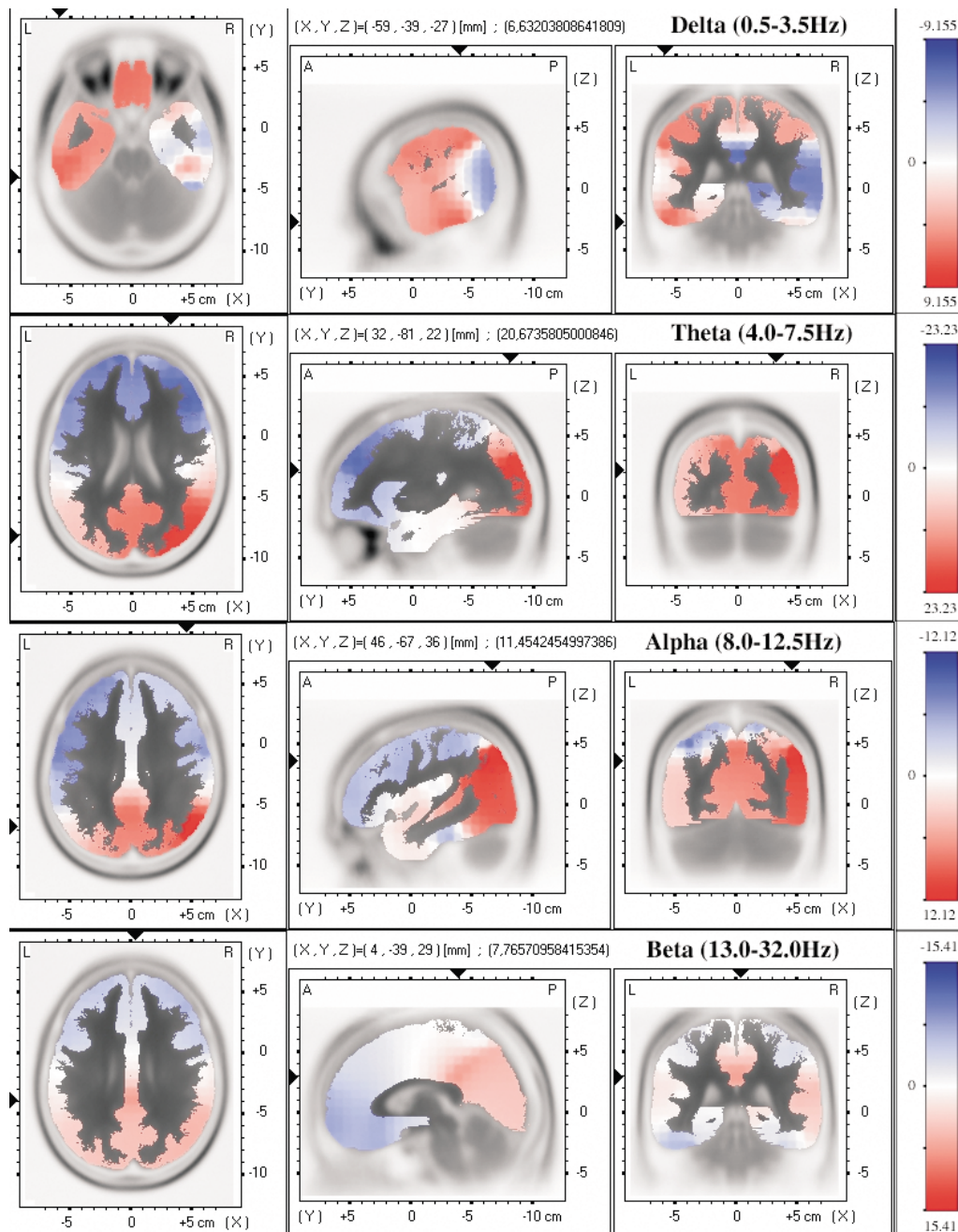


Figure 4.21 – Sommeil profond.



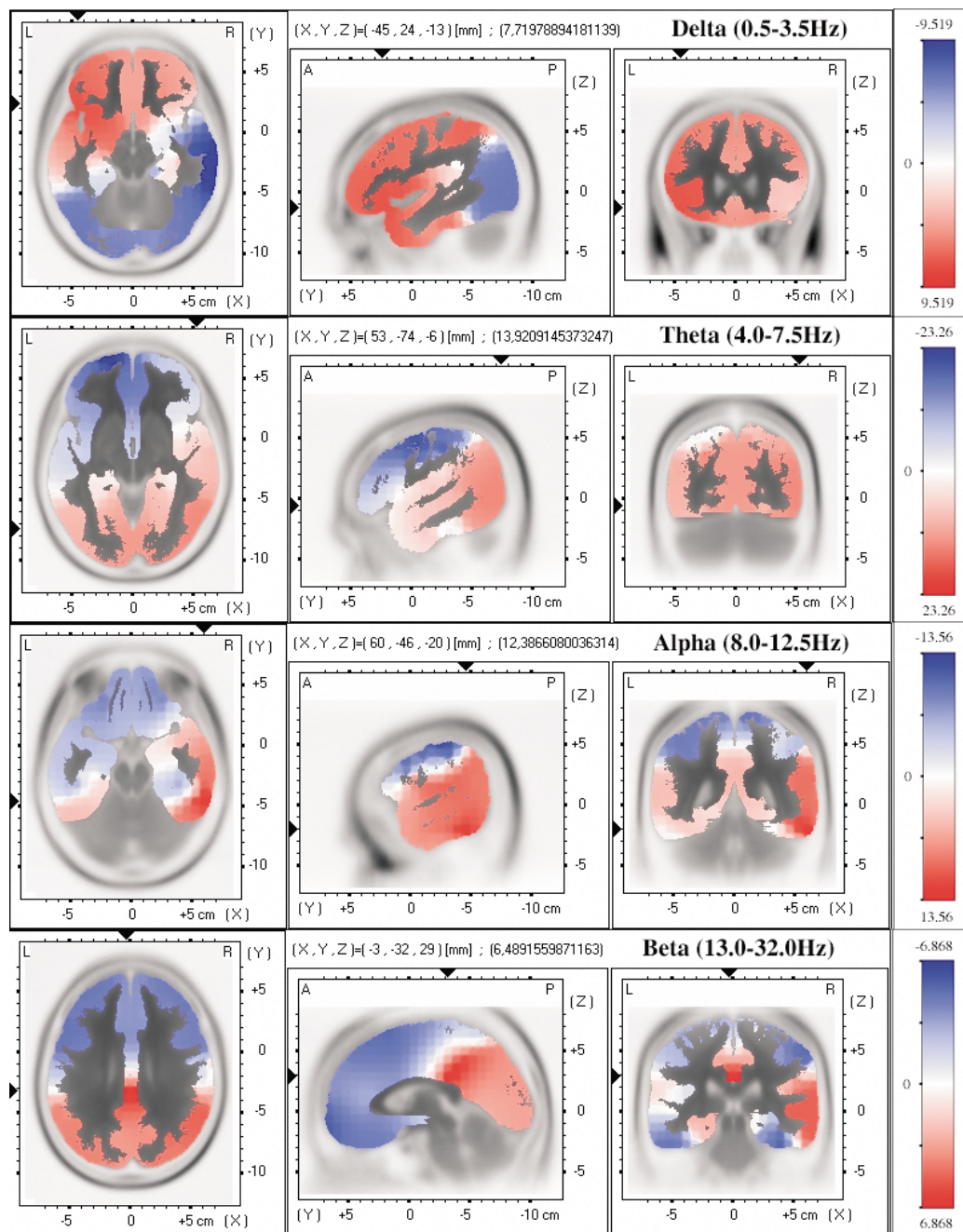


Figure 4.22 – Sommeil léger.

## 4.4 Conclusion

Les rapports humains, partagés durant trois ans dans ce centre de recherche biomédical, ont clairement constitué une expérience émotionnelle très riche. De même, les connaissances fonctionnelles du cerveau ont su m'apporter un éclairage nouveau dans ma vision des choses et m'ont poussé à mûrir certaines réflexions. Néanmoins, il ne faudrait pas considérer uniquement ces deux points comme seuls apports de mon activité de recherche dans cet établissement.

Cette période professionnelle m'a aussi permis d'appréhender des systèmes électromagnétiques biomédicaux de pointe, comme l'IRM ou la magnéto-encéphalographie avec déjà des éléments de mécanique quantique. Là-bas, j'ai développé des méthodologies de traitement du signal et dû gérer certains aspects spécifiques du traitement de l'information, comme la contradiction entre les experts. Enfin, le point qu'il faut souligner, est que, dans ce contexte, cette période a aussi été l'occasion de privilégier une approche de modélisation. Même imparfait, j'ai pu proposer un modèle du champ électromagnétique rayonné par le cerveau et travailler sur les techniques d'inversion de ce modèle.

## Références

1. Anonyme. *L'Épopée de Gilgameš* (Gallimard, 1992).
2. Anonyme. *The Rig Veda* (Penguin Classics, 2005).
3. Derome, L. *Le cerveau selon Aristote* mémoire de master (Université de Montréal, 2016).
4. Hypocrate. *La maladie sacrée* (Paris, les Belles lettres, 2003).
5. Cobb, M. *The Idea of the Brain* (Profile Books Ltd, 2020).
6. Deuraseh, N. & Talib, M. A. Mental Health in Islamic Medical Tradition. *The International Medical Journal* **4**, 76-79 (2005).
7. Bloch, F. Nuclear induction. *Phys. Rev.* **70**, 460-474 (1946).
8. Bloch, F., Hansen, W. W. & Packard, M. The nuclear induction experiment. *Phys. Rev.* **70**, 474-485 (1946).
9. Purcell, E. M., Torrey, H. C. & Pound, R. V. Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid. *Phys. Rev.* **69**, 37-38 (1946).
10. Wilcox, W. *Quantum Principles and Particles* 2nd (CRC Press, 2019).
11. Kastler, B., Vetter, D., Patay, Z. & Germain, P. *Comprendre l'IRM* 7ième (Elsevier Masson, 2011).
12. Lauterbur, P. C. Image Formation by Induced Local Interactions : Examples Employing Nuclear Magnetic Resonance. *Nature* **242**, 190-191 (1973).
13. Paschal, C. B. & Morris, H. D. K-Space in the Clinic. *Journal of Magnetic Resonance Imaging* **19**, 145-159 (2004).
14. Froehlich, J. M., Nanz, D. & Pruessmann, K. P. *How Does MRI Work ?* (Springer, 2008).
15. Elmaoglu, M. & Çelik, A. *MRI Handbook* (Springer, 2012).
16. Constantinides, C. *Magnetic Resonance Imaging* (CRC Press, 2014).
17. Ansorge, R. & Graves, M. *The Physics and Mathematics of MRI* (IOP Publishing, 2016).

18. Kandel, E. R., Koester, J. D., Mack, S. H. & Siegelbaum, S. A. *Principles of Neural Science* 6th (Mc Graw Hill, 2021).
19. Hodgkin, A. & Huxley, A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* **117**, 500-544 (1952).
20. Ormerod, W. Richard Caton (1842-1926) : pioneer electrophysiologist and cardiologist. *Journal of Medical Biography* **14**, 30-35 (2006).
21. Berger, H. Über das Elektrenkephalogramm des Menschen. *Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankheiten* **87**, 527-570 (1929).
22. Oostenveld, R. & Praamstra, P. The five percent electrode system for high-resolution EEG and ERP measurements. *Clinical Neurophysiology* **112**, 713-719 (2001).
23. Jatoi, M. A. & Kamel, N. *Brain Source Localization Using EEG Signal Analysis* (CRC Press, 2018).
24. Ilmoniemi, R. J. & Sarvas, J. *Brain Signals* (MIT Press, 2019).
25. Bardeen, J., Cooper, L. N. & Schrieffer, J. R. Theory of Superconductivity. *Physical Review* **108**, 1175-1204 (1957).
26. Josephson, B. D. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters* **1**, 251-253 (1962).
27. Veauvy, C. *Imagerie magnétique par micro-SQUID à basse température* thèse de troisième cycle (Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 2002).
28. Papanicolaou, A. C. *Clinical Magnetoencephalography and Magnetic Source Imaging* (Cambridge University Press, 2009).
29. Coatanhay, A., Richard, C., Lengelle, R., Muzet, A. & Macher, J.-P. *Automated detection of K-complexes :characterization of benzodiazepine effects in ESRS* (2000).
30. Coatanhay, A., Richard, C., Lengelle, R., Muzet, A. & Macher, J.-P. *Time-frequency detection of K-complexes. Methodology and performance estimation in WFSRS World Federation of Sleep Research Societies* (Dresde, Germany, 05-09 October 1999).
31. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L., Boeijinga, P., Toussaint, M. & Macher, J.-P. *Tomographie électromagnétique : mise en évidence des composantes fréquentielles en localisation de source in ACM/MDA Acquisition Conduite par le Modèle* (Grenoble, France, 23-24 November 2000).
32. Staner, L., Viardot, G., Coatanhay, A., Toussaint, M., Muzet, A., Luthringer, R., Roegel, J.-C. & Macher, J.-P. *Microarousal and heart rate variability during human sleep in ESRS* (2000).
33. Coatanhay, A., Richard, C. & Staner, L. Classification en temps-fréquence à partir de données expertisées. *ECA (Extraction des Connaissances et Apprentissage)* **1**, 293-304 (2002).
34. Bremer, G., Smith, J. S. & Sarakan, L. Automatic detection of K-complex in sleep electroencephalograms. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **17**, 314-323 (1970).
35. Viardot, G., Coatanhay, A., Lengelle, R., Richard, C., Staner, L., Muzet, A. & Macher, J.-P. *Fusion d'avis divergents d'experts in ACM/MDA* (2000).
36. Viardot, G., Lengelle, R., Richard, C. & Coatanhay, A. *Fusion partiellement supervisée d'avis d'experts. application à la décision statistique in GRETSI* (2001).

37. N.Bankman, I., Sigillito, V. G., Wise, R. A. & Smith, P. L. Feature-based detection of the K-complex wave in the human electroencephalogram using neural networks. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **39**, 1305-1310 (1992).
38. Da Rosa, A. C. & Paiva, T. Automatic detection of K-complexes : Validation in normals and dysthymic patients. *Sleep* **16**, 239-245 (1993).
39. Jansen, B. H. Artificial neural nets for K-complex detection. *IEEE Eng. Med. Biol.* **9**, 50-52 (1990).
40. Jobert, M., Poiseau, E., Jahnig, P., Schulz, H. & Kubicki, S. Pattern recognition by matched filtering : an analysis of sleep and K-complex density under the influence of lormetazepam-zopiclone. *Neuropsychobiology* **26**, 100-107 (1992).
41. Destin e, J., Beckers, B., Fombellida, M., Poirrier, R., Dive, D. & Franck, G. *Utilisation des R seaux de Neurons Artificiels pour la reconnaissance des Grapho-El ments Phasiques dans le cadre de l'Analyse du Sommeil* in *Symposium International 25ans d'Analyse Automatique du Sommeil* (1994).
42. Jacqmin, A., Schatelbrand, N., Lengell e, R., Muzet, A. & Macher, J. Use of time-frequency analysis to discriminate between K-complexes and delta waves. *J. Sleep Res.* **5**, 98 (1996).
43. Flandrin, P. A Time-Frequency Formulation of Optimum Detection. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **36**, 1377-1384 (1988).
44. Jones, D. L. & Sayeed, A. M. *Blind Quadratic and Time-Frequency based Detectors from Training Data* in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing* (1995).
45. Devroye, L., Gyorfı, L. & Lugosi, G. *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition* (Springer Verlag, New York, 1996).
46. Fukunaga, K. *Statistical pattern recognition* 2nd (Academic Press, London, 1990).
47. Vapnik, V. N. *Estimation of dependences based on empirical data* (Springer Verlag, New York, 1982).
48. Vapnik, V. N. & Chervonenkis, A. Y. On the Uniform Convergence of Relative Frequencies of Events to their Probabilities. *Theory of Probabilities and its Applications* **16**, 264-280 (1971).
49. Richard, C. & Lengell e, R. *On the Dimension of the Discrete Wigner-Ville Transform Range Space. Application to Time-Frequency-Based Detectors Design* in *IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis - IEEE TFST'98, Pittsburgh* (1998).
50. Richard, C. & Lengell e, R. *Two Algorithms for Designing Optimal Reduced-Bias Data-Driven Time-Frequency Detectors* in *IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis - IEEE TFST'98, Pittsburgh* (1998).
51. Richard, C. & Lengell e, R. Data-driven Design and Complexity Control of Time-Frequency Detectors. *Signal Processing* **77**, 37-48 (1999).
52. Da Rosa, A. C., Kemp, B., Paiva, T., Lopes Da Silva, F. H. & Kamphuisen, H. A. C. A model-based detector of vertex waves and K complexes in sleep electroencephalogram. *Electroencephalography and clinical Neurophysiology* **78**, 71-79 (1991).
53. Pascual-Marqui, R. D., Michel, C. M. & Lehmann, D. Low resolution electromagnetic tomography : A new method for localizing electrical activity in the brain. *International Journal of Psychophysiology* **18**, 49-65 (1994).

54. Hämäläinen, M., Hari, R., Ilmoniemi, R. J., Knuutila, J. & Lounasmaa, O. V. Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Rev. Mod. Phys.* **65**, 413-497 (1993).
55. De Munck, J. C. & Peters, M. J. A Fast Method to Compute the Potential in the Multisphere Model. *IEEE Tans. Biomedical Engineering* **40**, 1166-1172 (1993).
56. Koräts, G. *Cortical source imaging : from the laplacian montage to sparse inverse solutions* thèse de troisième cycle (Université de Lorraine, 2016).
57. Berg, P. & Scherg, M. A fast method for forward computation of multiple-shell spherical head models. *Electroencephalography and clinical Neurophysiology* **90**, 58-64 (1994).
58. Gaignaire, R., Crevecoeur, G., Dupré, L., Sabariego, R. V., 1, P. D. & Geuzaine, C. Stochastic Uncertainty Quantification of the Conductivity in EEG Source Analysis by Using Polynomial Chaos Decomposition. *IEEE Trans. on Mag.* **46**, 3457-3460 (2010).
59. Wolters, C. H., Grasedyck, L. & Hackbusch, W. Efficient computation of lead field bases and influence matrix for the FEM-based EEG and MEG inverse problem. *Inverse Problems* **20**, 1099-1116 (2004).
60. Vallaghé, S. & Papadopoulos, T. A Trilinear Immersed Finite Element Method for Solving the Electroencephalography Forward Problem. *SIAM J. Sci. Comput.* **32**, 2379-2394 (2010).
61. Sarvas, J. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. *Phys.Med. Biol.* **32**, 11-22 (1987).
62. Kybic, J., Clerc, M., Abboud, T., Faugeras, O., Keriven, R. & Papadopoulos, T. A Common Formalism for the Integral Formulations of the Forward EEG Problem. *IEEE Transactions on Medical Imaging* **24**, 12-28 (2005).
63. Jeffs, B., Leahy, R. & Singh, M. An evaluation of methods for neuromagnetic image reconstruction. *IEEE Trans. Biomed. Engineering* **34**, 713-723 (1987).
64. Lin, F.-H., Witzel, T., Ahlfors, S. P., Stufflebeam, S. M., Belliveau, J. W. & Hämäläinen, M. S. Assessing and improving the spatial accuracy in MEG source localization by depth-weighted minimum-norm estimates. *NeuroImage* **31**, 160-171 (2006).
65. Pascual-Marqui, R. Standardized low resolution brain electromagnetic tomography (sLORETA) : technical details. *Methods Find Exp Clin Pharmacol.* **24**, 5-12 (2002).
66. Mäkelä, N., Stenroos, M., Sarvas, J. & Ilmoniemi, R. J. Truncated RAP-MUSIC (TRAP-MUSIC) for MEG and EEG source localization. *Neuroimage* **167**, 73-83 (2018).
67. Becker, H. *Denoising, separation and localization of EEG sources in the context of epilepsy* thèse de troisième cycle (Université de Nice-Sophia Antipolis, 2014).
68. Costa, M. F. H. *Bayesian M/EEG Source Localization with possible Joint Skull Conductivity Estimation* thèse de troisième cycle (Institut National Polytechnique de Toulouse, 2017).
69. Lancaster, J. L., Woldorff, M. G., Parsons, L. M., Liotti, M., Freitas, C. S., Rainey, L., Kochunov, P. V., Nickerson, D., Mikiten, S. A. & Fox, P. T. Automated Talairach Atlas Labels For Functional Brain Mapping. *Human Brain Mapping* **10**, 120-131 (2000).
70. Lancaster, J., Rainey, L., Summerlin, J., Freitas, C., Fox, P., Evans, A., Toga, A. & Mazziotta, J. Automated Labeling of the Human Brain : A Preliminary Report on the Development and Evaluation of a Forward-Transform Method. *Human Brain Mapping* **5**, 238-242 (1997).

71. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L. & Boeijinga, P. EEG source identification : Frequency analysis during sleep. *C. R. Biol.* **325**, 1-10 (2002).
72. Coatanhay, A., Soufflet, L., Staner, L., Boeijinga, P., Toussaint, M. & Macher, J.-P. *EEG source identification related to a frequency band : 3D located fluvoxamine effects during REM sleep in ISBET* (2000).
73. Pascual-Marqui, R. D., Esslen, M., Kochi, K. & Lehmann, D. Functional imaging with low resolution brain electromagnetic tomography (LORETA) : a review. *International Journal of Psychophysiology* **24C**, 91-95 (2002).
74. Soufflet, L. & Boeijinga, P. H. Linear Inverse Solutions : Simulations from a Realistic Head Model in MEG. *Brain Topography* **18**, 87-99 (2005).
75. And· Roberto D. Pascual-Marqui, A. B., Tarokh, L. & Achermann, P. Mapping Slow Waves by EEG Topography and Source Localization : Effects of Sleep Deprivation. *Brain Topogr.* **31**, 257-269 (2018).
76. Placko, D. & Kundu, T. *DPSM for modeling engineering problems* (Wiley, 2007).
77. Liu, G.-R. *Mesh free methods : moving beyond the finite element method* (CRC Press, 2003).
78. Fasshauer, G. E. *Meshfree Approximation Methods with Matlab* (World Scientific, 2007).



## Chapitre 5

---

# Ondes, rugosités et reliefs

---

Ce chapitre correspond en grande partie à mon arrivée à l'ENSTA Bretagne (ENSIETA à l'époque). Dans un tout premier temps, le sujet qui m'avait été proposé a rapidement montré de nombreuses limites expérimentales. Par la suite, en collaboration avec Ali Khenchaf, j'ai pu me réorienter vers la problématique de la diffusion par des surfaces rugueuses. Celle-ci est introduite dans toute sa généralité de façon la plus synthétique possible, en renvoyant à de nombreuses références pour plus de détails et en introduisant les principales approches asymptotiques. En suivant cette voie, je me suis attaché à l'application de ces modèles asymptotiques au contexte maritime. Concrètement, je présente ici les travaux de recherche liés à l'encadrement de trois thèses, sous la direction de Ali Khenchaf, impliquant l'utilisation des approches asymptotiques pour modéliser le champ électromagnétique diffusé par des surfaces de mer.

Dans une deuxième partie, je présente des travaux de recherche beaucoup plus récents, menés avec Viet Dung Nguyen et Ali Mansour, sur la diffusion des sols à très forts reliefs. Ces derniers travaux font appel à la théorie de la diffraction et au lien qu'il est possible de faire avec les techniques d'apprentissage profond.

5.1	Égarements et découvertes . . . . .	112
5.2	Diffusion électromagnétique par une surface rugueuse . . . . .	114
5.2.1	Description d'une surface rugueuse . . . . .	114
5.2.2	Existence et unicité du problème physique . . . . .	117
5.2.3	Modélisations asymptotiques . . . . .	117
5.2.4	Application à la diffusion électromagnétique par des surfaces de mer . . . . .	125
5.2.5	Mes activités de recherche dans le domaine de la diffusion par des surfaces de mer vues comme des surfaces rugueuses . . . . .	130
5.3	De la surface rugueuse au fort relief . . . . .	141
5.3.1	Modèles élémentaires . . . . .	142
5.3.2	Modèle de Vogler . . . . .	143
5.3.3	Accélération de l'algorithme, première voie . . . . .	146
5.3.4	Accélération de l'algorithme, voie plus radicale . . . . .	147
5.3.5	Pour aller plus loin . . . . .	147
5.4	Conclusion . . . . .	151



## 5.1 Égarements et découvertes

À mon arrivée à l'ENSTA Bretagne en juin 2001 qui s'appelait alors l'ENSIETA, on m'avait invité à mener des études sur les radars à pénétration de sol, ou Ground Penetrating Radar (GPR) en anglais, pour des applications agricoles. L'objectif dans ce contexte était de caractériser la nature des premières couches de terrain (sur les premières dizaines de centimètres de profondeur) afin d'apporter une information utile et la plus précise possible à l'agriculteur (caractéristiques physiques et chimiques). Le principe général du GPR qui est décrit dans de nombreux ouvrages [1-5], est de placer une antenne émettrice et une antenne réceptrice à la surface et d'enregistrer les signaux réémis par le sol, voir figure 5.1. En se déplaçant à la surface, on obtient alors une imagerie du sous-sol. Le signal émis est généralement une courte impulsion dans la gamme de fréquence allant de 10 MHz à 30 GHz en fonction de la profondeur que l'on souhaite explorer, les fréquences élevées s'atténuant très vite.

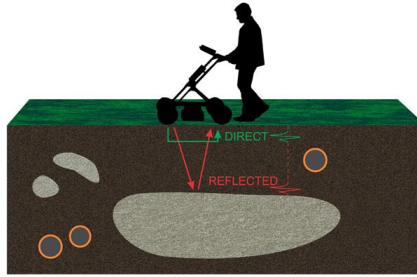


Figure 5.1 – Présentation générale d'un GPR.

Mon étude a été réalisée en collaboration avec le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) à Nantes qui s'appelle actuellement l'Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux (IFSTTAR). Sur la figure 5.2, on peut voir l'une des mesures GPR réalisée sur une plateforme test calibrée. Ces mesures m'ont permis de développer mon activité de recherche dans le domaine du GPR. Ma première approche a été de considérer en première approche que le signal reçu  $s(t)$  pouvait se modéliser comme une convolution temporelle  $s(t) = e(t) * r(t)$  entre le pulse d'émission  $e(t)$  et le peigne de Dirac temporel  $r(t)$  correspondant aux temps de rencontre des interfaces planes. Le problème se résume alors à un processus de déconvolution dont j'ai développé une version itérative [6]. J'ai également développé une approche probabiliste en appliquant une modélisation de Markov [7]. Lorsque le sol ne peut pas s'identifier à des strates, on peut aussi considérer que les caractéristiques diélectriques du milieu varie continûment en fonction de la profondeur. En m'appuyant sur les travaux de Ramm en mathématiques appliquées [8-10], on peut montrer que le problème GPR se modélise par une équation différentielle :

$$u' - \lambda^2 u + \omega^2 A^2(z) u + i\omega B(z) u = -\delta(z - z_0) \quad (5.1)$$

avec :

$$u(\pm\infty, \lambda, \omega) = 0 \quad (5.2)$$

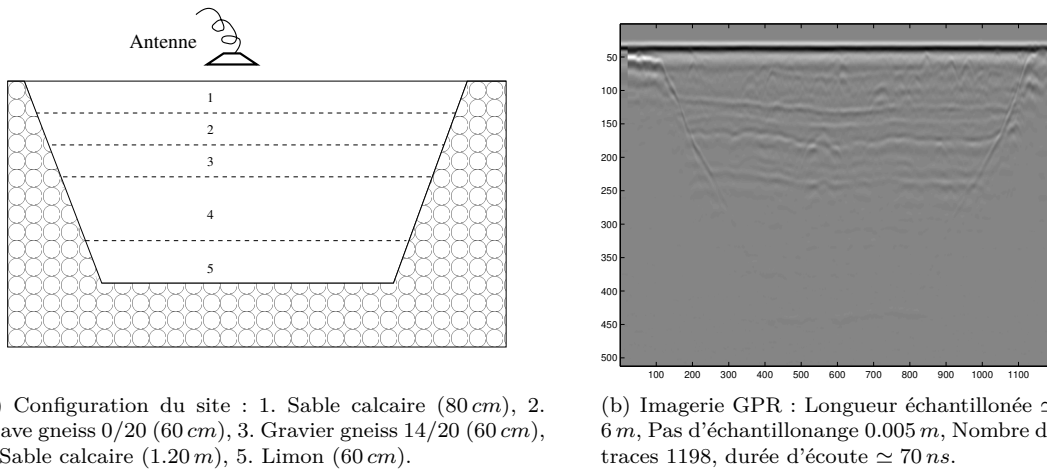


Figure 5.2 – Enregistrement GPR réalisé au LCPC : fréquence centrale du pulse 400 MHz (soit une longueur d'onde de 0.75 m dans le vide).

où  $A(z)$  et  $A(z)$  dépendent de la partie réelle et imaginaire de la permittivité en fonction de la profondeur  $z$ . Il est possible de retrouver ces caractéristiques en appliquant une transformation de Laplace inverse ce qui correspond à un problème mal posé. En appliquant un processus de régularisation, on peut espérer alors estimer les caractéristiques du sol à partir d'un signal à faible bruit [11].

Mes travaux de recherche ont été repris pour des mesures GPR faites sur le réseau routier, voir par exemple [12], ou des structures en béton. Néanmoins, l'objectif initial était d'appliquer ces recherches à un contexte de terres agricole en région Bretagne, et là il faut admettre que l'utilisation du GPR a été remis en question aux moins pour trois raisons. La première est d'ordre expérimental. Les systèmes d'antennes utilisés étaient loin d'être parfaits et le diagramme de rayonnement n'était pas uniquement dirigé vers le sol. Des lobes secondaires significatifs pouvaient aussi pointer vers des cibles au dessus du sol ce qui parasite complètement la lecture des signaux GPR. La deuxième raison, plus fondamentale, est que, sous nos climats, la terre possède un taux d'humidité extrêmement important ce qui conduit à des conductivités du sol très élevées. Sous ces conditions, les ondes électromagnétiques s'atténuent très rapidement. Pour pallier ce problème, il est toujours possible de travailler à des fréquences basses. Cependant, quand les fréquences sont trop basses, la résolution spatiale n'est plus suffisante pour répondre au problème de l'analyse des premières couches du sol. La dernière raison est qu'en milieu naturel les différentes strates ne sont généralement pas très régulières et l'approximation par des interfaces planes n'est plus du tout valable. Il faut explicitement prendre en compte dans la modélisation physique l'état d'irrégularité des interfaces. C'est cette problématique qui m'a amené à aborder la modélisation électromagnétique par des surfaces rugueuses et à collaborer durant de nombreuses années avec A. Khenchaf, spécialiste de ce sujet dans le contexte de la diffusion de ondes radar par des surfaces de mer.

## 5.2 Diffusion électromagnétique par une surface rugueuse

### 5.2.1 Description d'une surface rugueuse

Il est possible de qualifier une surface par le terme "rugueux" dès lors que celle-ci n'est pas lisse au sens mathématique, voire même dans le cas où elle présente la moindre forme de non-planéité. On comprend que la représentation d'une telle surface peut se faire par bien des façons. En anglais, on pourra utiliser des termes comme "rough surface" ou comme "grating surface". La non-planéité d'une surface peut se décrire par exemple au travers d'un modèle géométrique fractal sur lequel on décrit le comportement de la diffraction des ondes électromagnétiques. Pour illustrer ces approches, on citera par exemple des articles comme [13, 14], la thèse [15] ou des livres plus généralistes comme [16]. Notamment, on trouve dans [17] une application plus spécifique de ces approches sur une surface de mer. Une autre approche consiste à introduire une certaine périodicité dans la description géométrique de la surface. Cette hypothèse de périodicité ouvre la voie à des traitements mathématiques efficaces de la modélisation du champ électromagnétique diffracté. L'exemple emblématique est l'application des transformations de Floquet-Bloch aux problèmes de diffraction. La périodisation de la surface de diffraction conduit également à des techniques de résolution par équation intégrale spécifique [18]. On peut aussi évoquer des phénomènes particuliers, comme l'anomalie de Wood découverte en 1902 [19, chapitre 2], directement induits par la périodicité des surfaces de diffraction.

En ce qui concerne mes travaux de recherche, une surface rugueuse correspond classiquement à la trajectoire (ou la réalisation) d'un processus stochastique continu. Elle sera essentiellement caractérisée par sa distribution de hauteur et sa fonction d'auto-corrélation.

**Distribution des hauteurs** La distribution statistique des hauteurs de la surface, classiquement une distribution gaussienne de moyenne nulle, sera caractérisée par sa variance  $\sigma^2$  ou plus précisément sa hauteur quadratique moyenne  $\sigma$ . Cette hauteur quadratique moyenne va permettre de quantifier un degré de rugosité de la surface [20] par rapport la longueur de l'onde incidente, ce qui définit le critère de Rayleigh. En effet, une onde incidente avec une inclinaison  $\theta$  et impactant deux sommets d'une surface (respectivement d'abscisse  $x_1$  et  $x_2$ , d'ordonnée  $h_1$  et  $h_2$ ) voir figure 5.3, va induire dans la direction d'observation  $\theta_s$  une différence de marche entre les rayons diffractés.

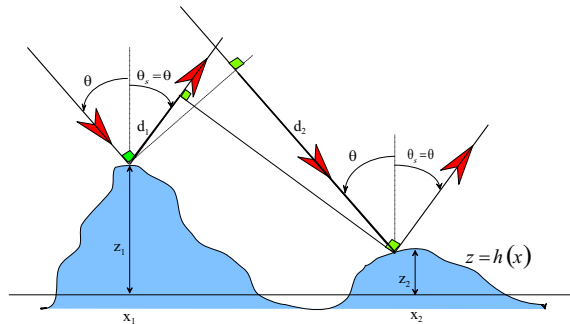


Figure 5.3 – Déphasage entre deux rayons dû à la rugosité de la surface, extrait de [21].

Cette différence de marche  $\Delta d$  correspond à une différence de phase  $\Delta\varphi$  qui s'écrit :

$$\Delta\varphi = k\Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} \{(z_1 - z_2) (\cos \theta + \cos \theta_s) + (x_2 - x_1) (\sin \theta - \sin \theta_s)\} \quad (5.3)$$

où  $k$  est le module du vecteur de l'onde électromagnétique. Dans la direction spéculaire  $\theta = \theta_s$  cette expression devient :

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} (z_1 - z_2) \cos \theta = 2k (z_1 - z_2) \cos \theta \quad (5.4)$$

Si  $\Delta\varphi \approx 0$ , les deux ondes sont en phase et l'interférence est constructive. Par contre si  $\Delta\varphi \approx \pi$ , les deux faisceaux interfèrent d'une façon destructive, entraînant une faible contribution de l'énergie diffusée dans la direction spéculaire. Ce raisonnement mené à partir de deux sommets peut clairement s'étendre à l'ensemble de la surface rugueuse. Le critère de Rayleigh fixe un seuil de  $\frac{\pi}{2}$  entre les deux composantes. Si  $\Delta\varphi < \pi/2$  quelque soit deux points de la surface, alors on parlera de surface peu rugueuse, voire abusivement de surface lisse. Dans le cas contraire, on parlera de surface fortement rugueuse. Statistiquement, la hauteur quadratique moyenne  $\sigma$  joue le rôle de  $2(z_1 - z_2)$  et le critère de Rayleigh devient :

$$R_a = \sigma k \cos \theta \quad (5.5)$$

Si  $R_a < \pi/4$  la surface sera considérée comme très peu rugueuse et significativement rugueuse dans le cas contraire. La rugosité d'une surface n'est clairement pas une caractéristique géométrique intrinsèque mais dépend de la longueur de l'onde électromagnétique incidente.

**Fonction d'auto-corrélation** La donnée de la distribution des hauteurs ne suffit clairement pas à caractériser une surface rugueuse. Les trois courbes de la figures 5.4 possèdent exactement la même distribution statistique gaussienne des hauteurs.

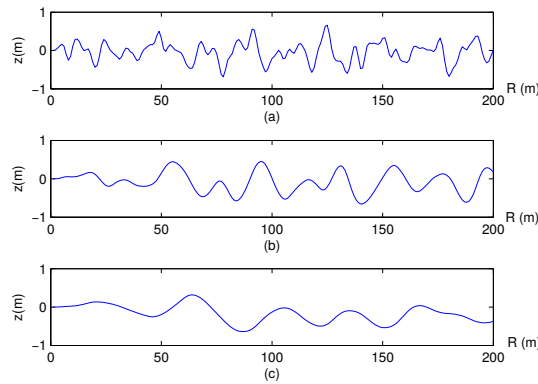


Figure 5.4 – Profil d'une distribution gaussienne d'écart-type unitaire pour différentes longueurs de corrélation (autocorrélation gaussienne) (a)  $L=7\text{m}$ , (b)  $L=20\text{m}$ , (c)  $L=40\text{m}$ , extrait de [21].

Pour qualifier un peu plus la rugosité de la courbe, il est utile d'introduire l'autocorrélation normalisée  $\rho(\tau)$  de la courbe  $z = h(x)$  (ou  $\rho(\tau_x, \tau_y)$  avec  $z = h(x, y)$  pour une surface bi-dimensionnelle) définie par :

$$\rho(\tau) = \frac{\langle h(x) h(x + \tau) \rangle}{\sigma^2} \quad (5.6)$$

où  $\sigma^2$  est la variance de hauteur. Dans le cas bi-dimensionnel, cela donne :

$$\rho(\tau_x, \tau_y) = \frac{\langle h(x, y) h(x + \tau_x, y + \tau_y) \rangle}{\sigma^2} \quad (5.7)$$

Un cas très fréquent est de considérer une fonction d'autocorrélation gaussienne :

$$\rho(\tau) = e^{-\tau^2/L^2} \quad (5.8)$$

ou exponentielle :

$$\rho(\tau) = e^{-|\tau|/L} \quad (5.9)$$

Le terme caractéristique  $L$  est appelé la longueur de corrélation. En pratique, la fonction d'autocorrélation n'est pas la seule notion utilisée pour caractériser la dynamique de la surface. Très fréquemment, on préférera travailler avec sa transformée de Fourier  $S(K)$  :

$$S(K) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) e^{iK\tau} d\tau \quad (5.10)$$

ou plus encore avec le spectre  $W(K)$  :

$$W(K) = \frac{S(K)}{\sigma^2} \quad (5.11)$$

$K$  désignant le nombre d'onde spatial de la surface rugueuse. En dimension deux, cela donne :

$$W(K_x, K_y) = \frac{1}{2\pi} \iint \rho(\tau_x, \tau_y) e^{i(K_x \tau_x + K_y \tau_y)} d\tau_x d\tau_y \quad (5.12)$$

Il est à noter que, très souvent, dans les modélisations de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses, les approximations faites prennent en compte uniquement le module de  $W(K_x, K_y)$ . Il est aussi important de noter pour la suite que le spectre bi-dimensionnel est souvent manipulé en coordonnées polaires  $W(K_x, K_y) = W(K, \phi)$ .

**Distribution de pentes** Une troisième description utile pour une surface rugueuse est de définir une distribution de probabilité  $P(Z)$  ou  $P(Z_x, Z_y)$  dans le cas bidimensionnel telle que par construction :

$$\iint P(Z_x, Z_y) dZ_x dZ_y \quad (5.13)$$

avec :

$$Z_x = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \quad \text{et} \quad Z_y = \frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \quad (5.14)$$

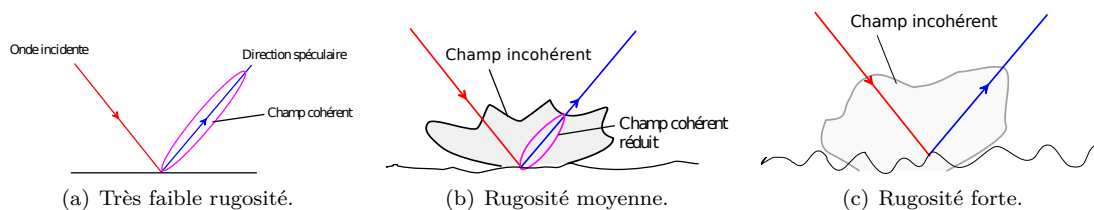


Figure 5.5 – Présentation schématique du phénomène de diffusion par une surface en fonction de son niveau de rugosité, extrait de [21].

### 5.2.2 Existence et unicité du problème physique

Avant de chercher à étudier une méthode de calcul ou d'approximation du champ électromagnétique (le problème est très similaire pour une onde acoustique) diffusé par une surface rugueuse, on peut se demander si le problème a réellement un sens. Mathématiquement, cela revient à se demander si le problème a une solution et si cette solution est unique. On peut penser que ces questions sont saugrenues puisque le problème mathématique n'est que la modélisation d'un problème physique auquel il devrait correspondre une unique solution acceptable. En réalité, la difficulté principale provient du fait que l'on considère généralement une surface infinie, ce qui est une hypothèse non-physique, dont on ne connaît que des propriétés statistiques. Vu sous cet angle, répondre au problème devient une problématique pas forcément simple à traiter.

On peut remonter aux années 40 pour voir les tous premiers travaux sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Helmholtz quand une des frontières est une surface rugueuse infinie. On trouve ainsi le travail de F. Rellich [22] qui démontre l'unicité lorsque la surface est de forme globale parabolicoïde. Une vingtaine d'année plus tard, F. M. Odeh prouve, dans [23], l'unicité de la solution dans le cas où la surface rugueuse est lisse, au sens mathématique, et est soit un cône ou s'approche d'une limite plane à l'infini. En 1987, A. Willers prouve l'existence d'une solution unique à ce problème, voir [24], en faisant l'hypothèse selon laquelle la limite est  $C^2$  et est plate à l'extérieur d'un ensemble compact.

D'autres travaux dans les années 70 (voir A. A. Vinnik et D. M. Èidus [25], V. Vogelsang [26], V. Minskii [27]) traite du problème de Dirichlet (champ nulle à la frontière) dans le cadre des espaces de Sobolev pondérés. L'existence de la solution est alors obtenue au prix d'une décroissance très rapide vers une surface plate à l'infini. Beaucoup plus récemment, les travaux de S. N. Chandler-Wilde et ses co-auteurs, pour le problème de Dirichlet, en considérant la question sous la forme d'une équation d'intégrale de frontière, a démontré l'existence de solution pour des conditions de frontières beaucoup moins restrictives. L'article [28] offre une bonne perspectives de l'ensemble des résultats théoriques obtenus sur ce sujet. Pour ma part, ces questions d'existence et d'unicité pour les problèmes de diffusion par des surfaces rugueuse aléatoires avait été l'occasion dans les années 2010 d'échanges avec Christophe Hazard du laboratoire POEMS à l'ENSTA ParisTech.

### 5.2.3 Modélisations asymptotiques

Le champ électrique diffusé par une surface rugueuse, comme l'illustre la figure 5.5, est diffusé en une composante cohérente dans la direction spéculaire et une composante incohérente.

L'objectif des méthodes asymptotiques consiste, compte tenu des caractéristiques statistiques

décrivant la surface rugueuse, à déterminer le champ électrique  $\mathbf{E}$ , induit par un champ incident  $\mathbf{E}_0$  dans les diverses directions d'observation. Le développement de ces méthodes fait maintenant l'objet d'une très abondante littérature et s'étale sur une très longue période. Sans oublier au XIX<sup>e</sup> siècle les travaux de G. Kirchhoff [29] et de Lord Rayleigh [30], ce domaine de recherche connaît des avancées très significative dans les années 1950, avec notamment les travaux de S. O. Rice [31] sur les petites perturbations ou ceux de C. Eckart [32] sur l'approximation de Kirchhoff. Depuis, ces recherches se sont poursuivies tout au long du XX<sup>e</sup> siècle avec les approches composites deux échelles [33-36] ou encore l'approximation des petites pentes [37, 38], et jusqu'à nos jours avec entre autre l'approximation de courbure pondérée [39, 40], voir aussi [41, 42] et l'application de ces théories à des problématiques acoustiques et électromagnétiques toujours plus variées, voir par exemple sur la diffusion multi-couche [43]. Les ouvrages traitant de ces méthodes forment un corpus conséquent avec des choix de présentation allant du théorique classique au très didactique [20, 44-53]. Il est clair aussi qu'il existe bien d'autres méthodes asymptotique que celles citées ici. On retrouvera, dans la remarquable analyse critique faite par T. Elfouhaily et C.-A. Guérin [54] sur le sujet, un riche panorama des différentes approches méthodologiques.

Géométriquement, on considère le repère cartésien  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ , choisi tel que le plan  $Oxy$  corresponde à la hauteur moyenne de la surface rugueuse, voir figure 5.6. On notera  $\mathbf{K}_0$  (resp.  $\mathbf{K}$ ) le vecteur d'onde incidente (resp. diffusé), leur module étant égal au nombre d'onde  $K = 2\pi/\lambda$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde, leurs directions les vecteurs unitaires  $\hat{\mathbf{n}}_0$  et  $\hat{\mathbf{n}}$ . On notera également  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}$  les projections des vecteurs  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}$  sur le plan  $Oxy$ . De même, on définit  $q_0$  et  $q$  tels que :  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0 - q_0 \hat{\mathbf{z}} = k_0 \hat{\mathbf{k}}_0 - q_0 \hat{\mathbf{z}}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{k} + q \hat{\mathbf{z}} = k \hat{\mathbf{k}} + q \hat{\mathbf{z}}$ . On pose aussi  $\mathbf{Q}_h = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$  et  $Q_z = q + q_0$ .

Les angles d'incidence sont notés  $\theta_0$  et  $\varphi_0$ , ceux de la direction d'observation  $\theta_s$  et  $\varphi_s$ . Les vecteurs  $\hat{\mathbf{v}}_0$  et  $\hat{\mathbf{h}}_0$  décrivent le plan de polarisation incident et les vecteurs  $\hat{\mathbf{v}}$  et  $\hat{\mathbf{h}}$  le plan de polarisation dans la direction d'observation. Dans ces deux plans de polarisation, nous aurons  $\mathbf{E}_0 = (E_{0v}, E_{0h})$  et  $\mathbf{E} = (E_v, E_h)$  les champ électriques incident et diffusé. Nous aurons donc les relations suivantes :

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.15)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_0 = -\cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.16)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_0 = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad (5.17)$$

et aussi :

$$\hat{\mathbf{n}} = \sin \theta_s \cos \varphi_s \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_s \sin \varphi_s \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta_s \hat{\mathbf{z}} \quad (5.18)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \cos \theta_s \cos \varphi_s \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_s \sin \varphi_s \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta_s \hat{\mathbf{z}} \quad (5.19)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = -\sin \varphi_s \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi_s \hat{\mathbf{y}} \quad (5.20)$$

avec  $\mathbf{K}_0 = K \hat{\mathbf{n}}_0$  et  $\mathbf{K} = K \hat{\mathbf{n}}$ .

La surface rugueuse est identifiée par sa fonction hauteur  $h = \eta(x, y) = \eta(\mathbf{r})$ , avec  $\mathbf{r}$  la position dans le plan  $Oxy$ . Dans l'espace, un point est représenté par le vecteur  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$ . L'objectif, dans ce contexte, est d'estimer l'opérateur linéaire  $\mathbb{S}(\mathbf{r}, z)$  tel que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbb{S}(\mathbf{r}, z) \cdot \mathbf{E}_0 \quad (5.21)$$

Le champ électromagnétique peut s'interpréter comme le résultat des sources induites sur la surface rugueuse et on peut alors écrire l'opérateur  $\mathbb{S}(\mathbf{r}, z)$  sous la forme d'une intégrale sur le plan  $Oxy$  des contributions locales :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + iqz}}{q} \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) d\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (5.22)$$

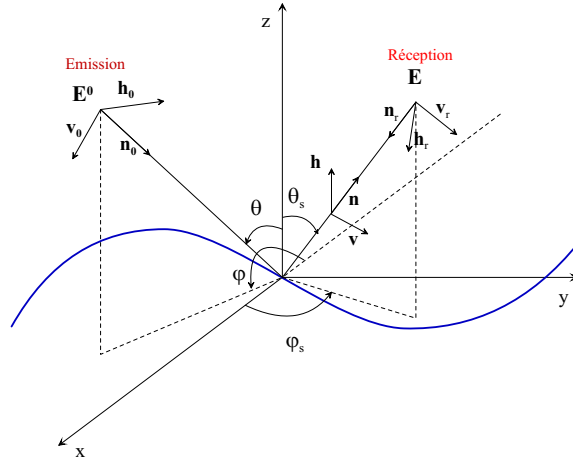


Figure 5.6 – Configuration géométrique, extrait de [21].

Dans la base polarimétrique  $(\hat{v}, \hat{h})$ , nous avons :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \begin{pmatrix} S_{vv_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) & S_{vh_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \\ S_{hv_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) & S_{hh_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \end{pmatrix} = (S_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)) \quad (5.23)$$

La moyenne spatiale des coefficients  $S_{\alpha\alpha_0}$  nous donne le coefficient de réflexion moyen  $V_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  qui est lié à la partie cohérente de la matrice :

$$V_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \langle S_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle \quad (5.24)$$

S'agissant de surfaces rugueuses étendues, on préférera normaliser par l'aire  $A_0$  de cette surface supposée très grande :

$$V_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \lim_{A_0 \rightarrow \infty} \frac{\langle S_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle}{A_0} \quad (5.25)$$

Pour la composante incohérente, il faut considérer les sommations en énergie et non plus en amplitude. Ainsi, la surface équivalente radar normalisée (SERN) (en anglais Normalized Radar Cross-Section (NRCS)) qui correspond à un bilan énergétique entre l'onde incidente et l'onde diffusée [55], est donnée par le moment statistique du second ordre de la matrice de diffusion :

$$\sigma_{\alpha\alpha_0} = \lim_{A_0 \rightarrow \infty} \frac{4\pi^2 K \langle |S_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - \langle S_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle|^2 \rangle}{q_0 A_0} \quad (5.26)$$

Ce formalisme étant posé, il reste maintenant à déterminer les coefficients  $S_{\alpha\alpha_0}$ . Pour cela, les méthodes asymptotiques consistent, à partir d'équations intégrales (qui seront détaillées au chapitre 6) directement issues des équations de Maxwell, à poser un certain nombre d'approximations et de simplifications qui permettent d'aboutir à une expression facilement exploitable des coefficients  $S_{\alpha\alpha_0}$ . Les différents choix d'approximations donnent lieu à différentes méthodes asymptotiques dont les domaines de validité peuvent varier. On peut ainsi lister les principales approches avec une brève description en utilisant les notations de [54] et de [40].



### La méthode des petites perturbation - SPM

L'approche de la méthode des petites perturbations (Small Perturbation Method - SPM) est l'une des approximations asymptotiques les plus anciennes, voir les travaux de Lord Rayleigh [30], de S. O. Rice [31] ou de K. M. Mitzner [56]. L'idée est de considérer que la surface rugueuse est relativement faible et qu'il est possible de développer l'opérateur  $\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  en une série de Taylor selon l'ordre de la hauteur de la surface  $h(x, y) = h(\mathbf{k})$  ou, si on considère une surface aléatoire, selon l'ordre de  $K\sigma$ , sachant que  $K$  est le nombre d'onde et  $\sigma$  l'écart type de la surface :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \mathbb{S}^0(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \mathbb{S}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \mathbb{S}^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \dots \quad (5.27)$$

où  $\mathbb{S}^n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  est l'ordre  $n$  en  $K\sigma$ . L'expression explicite de cette série est donnée dans [50] :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{Q_z} \mathbb{B}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{Q}_h) - i \mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \tilde{h}(\mathbf{Q}_h) - Q_z \int \mathbb{B}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}) \tilde{h}(\mathbf{k} - \boldsymbol{\xi}) \tilde{h}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{k}_0) d\boldsymbol{\xi} + \dots \quad (5.28)$$

avec  $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}_1$  et où  $\tilde{h}(\boldsymbol{\xi})$  est la transformée de Fourier de la fonction  $h(\mathbf{r})$ . Les matrices  $\mathbb{B}_n$  sont souvent appelés "les noyaux de Bragg". L'ordre 0 correspond aux coefficients de la réflexion de l'onde incidente sur une surface parfaitement plate, ce qui donne une modélisation du comportement spéculaire du champ diffusé assez limitée. Au premier ordre, pour une interface entre l'air, supposé vide, et un diélectrique, nous avons :

$$\mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = (\mathcal{B}_{1\alpha\alpha_0}) = 2 \begin{pmatrix} \frac{qq_0(\varepsilon-1)(q'q'_0\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}_0 - \varepsilon k k_0)}{(\varepsilon q + q')(\varepsilon q_0 + q'_0)} & \frac{qq_0(\varepsilon-1)Kq'(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}_0)\cdot\hat{\mathbf{z}}}{(\varepsilon q + q')(q_0 + q'_0)} \\ \frac{qq_0(\varepsilon-1)Kq'_0(\hat{\mathbf{k}}_0\times\hat{\mathbf{k}})\cdot\hat{\mathbf{z}}}{(q+q')(\varepsilon q_0 + q'_0)} & -\frac{qq_0(\varepsilon-1)K^2\hat{\mathbf{k}}_0\cdot\hat{\mathbf{k}}}{(q+q')(q_0+q'_0)} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

où  $q' = \sqrt{\varepsilon K^2 - k^2}$ ,  $q'_0 = \sqrt{\varepsilon K^2 - k_0^2}$  et  $\varepsilon$  est la permittivité relative du milieu sous l'interface. Pour une interface parfaitement conductrice, l'expression de la matrice  $\mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  est donnée dans [54]. Par ailleurs, toujours au premier ordre, les coefficients  $\sigma_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  sont de la forme :

$$\sigma_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = |\mathcal{B}_{1\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|^2 W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (5.30)$$

où  $W(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$  désigne le spectre normalisé de la rugosité de la surface, voir définition eq. (5.11). Dans la littérature, on trouve des développements de la méthode des petites perturbations jusqu'à l'ordre 3 [57], voire à l'ordre 4 [58]. D'une manière générale, l'approximation des petites perturbations reste valable pour des rugosités faibles. Dans le cas d'une surface à rugosité aléatoire gaussienne de variance  $\sigma^2$  et de longueur de corrélation  $L$ , le domaine de validité correspond aux conditions :

$$\begin{cases} K\sigma < 0.3 \\ \frac{\sqrt{2}}{0.3} K\sigma < KL \end{cases} \quad (5.31)$$

Ces conditions correspondent au domaine de validité représenté à la figure 5.7.

### L'approximation de Kirchhoff - KA

L'autre approximation asymptotique qui peut être qualifiée de classique ou même d'historique, est l'approximation de Kirchhoff (Kirchhoff Approximation - KA). À l'origine utilisée dans l'étude

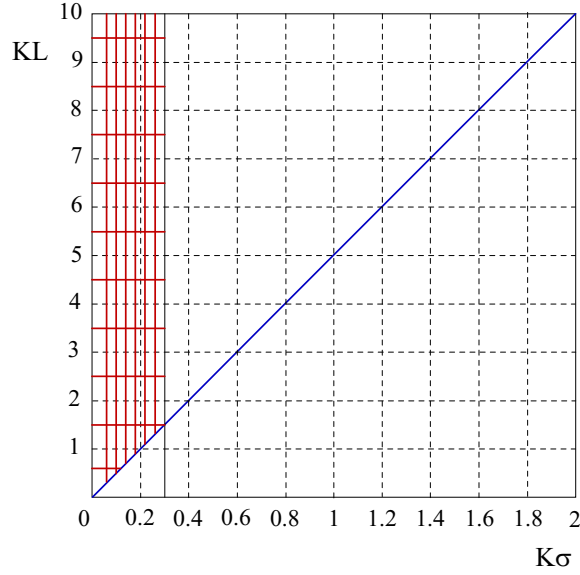


Figure 5.7 – Domaine de validité de la méthode des petites perturbations, extrait de [21].

de la diffraction de la lumière par G. Kirchhoff [20, 29], cette approximation consiste à admettre que l'interaction entre l'onde et l'interface se résume localement à celle du plan tangent en chaque point de la surface rugueuse, d'où l'utilisation du terme d'"approximation du plan tangent" ou celui de la "théorie de l'optique physique" pour la dénommer.

Sous cette hypothèse, l'opérateur  $\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  peut se formaliser par l'expression :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{Q_z} \int \mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; -Q_z \nabla h) e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \quad (5.32)$$

où  $\nabla h$  est la pente de la surface rugueuse au point  $(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}))$ . Le noyau  $\mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; -Q_z \nabla h)$  se calcule à partir des courants de surfaces du plan tangent induits par l'onde incidente.

En régime de hautes fréquences, l'approximation de Kirchhoff (KA) peut bénéficier d'une simplification supplémentaire en appliquant l'approximation de la phase stationnaire [59, 60]. On parle alors de l'Approximation de Kirchhoff de l'Optique Géométrique (Kirchhoff Approximation Geometrical Optics - KA-GO) :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{Q_z} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \quad (5.33)$$

avec  $\mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = (\mathcal{K}_{\alpha\alpha_0})$  tel que :

$$\mathcal{K}_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \mathcal{R}_{\alpha\alpha_0}(Q/2) \mathcal{K}_{\alpha\alpha_0}^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \quad (5.34)$$

où  $Q = |K - K_0|$  et où  $\mathcal{K}_{\alpha\alpha_0}^\infty$  sont les coefficients de la matrice de Kirchhoff pour une interface

parfaitement conductrice :

$$\mathcal{K}_{vv_0}^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\mathcal{K}_{hh_0}^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \left[ (K^2 + qq_0) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 - kk_0 \right] \quad (5.35)$$

$$\mathcal{K}_{vh_0}^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\mathcal{K}_{hv_0}^\infty(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = K(q + q_0) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (5.36)$$

Les coefficients  $\mathcal{R}_{\alpha\alpha_0}$  correspondent aux coefficients de Fresnel :

$$\mathcal{R}_{vv_0}(q) = \frac{\varepsilon q - \sqrt{(\varepsilon - 1)K^2 + q^2}}{\varepsilon q + \sqrt{(\varepsilon - 1)K^2 + q^2}} \quad (5.37)$$

$$\mathcal{R}_{vh_0}(q) = \mathcal{R}_{hv_0}(q) = \frac{\mathcal{R}_{vv_0}(q) + \mathcal{R}_{hh_0}(q)}{2} \quad (5.38)$$

$$\mathcal{R}_{vv_0}(q) = -\frac{q - \sqrt{(\varepsilon - 1)K^2 + q^2}}{q + \sqrt{(\varepsilon - 1)K^2 + q^2}} \quad (5.39)$$

Les coefficients  $\sigma_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  sous les hypothèses KA-GO sont de la forme :

$$\sigma_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \left| \frac{\mathcal{K}_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{Q_z^2} \right|^2 P\left(-\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{q + q_0}\right) \quad (5.40)$$

où  $P(\mathbf{n})$  correspond à la densité de probabilité des pentes  $P(Z_x, Z_y)$  quand  $Z_x$  et  $Z_y$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{n}$ .

Il est important de souligner que l'approche KA-GO est une théorie de rayon qui ne prend en compte que des interactions locales avec l'interface. En particulier, il faudrait en toute rigueur tenir compte des phénomènes d'ombrage sur les parties de l'interface non-éclairée par l'onde incidente, ce qui n'est pas le cas ici. On trouvera dans [52, 61] les corrections à apporter pour prendre en considération ces phénomènes d'ombrage.

Au vu des approximations faites, l'approximation KA-GO est limitée dans son domaine d'application et les conditions à respecter dans le cas d'une surface aléatoire gaussienne de variance  $\sigma^2$ , de longueur de corrélation  $L$  et pour une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\begin{cases} \frac{L}{\lambda} > \sqrt{\frac{2\sigma}{\lambda}} \sqrt{6\pi} \\ \frac{L}{\lambda} > \frac{3}{\pi} \\ K\sigma > \frac{\sqrt{10}}{2\pi} \frac{1}{|\cos\theta + \cos\theta_s|} \end{cases} \quad (5.41)$$

ce qui est illustré à la figure 5.8.

### La méthode deux échelles - TSM

Les approches SPM et KA-GO sont très largement complémentaires dans la mesure où leurs pré-supposés et donc leurs domaines de validité sont radicalement différents. L'approximation KA-GO va être particulièrement utile pour décrire la composante spéculaire du champ. L'approximation SPM, en revanche, apportera une meilleure description de la composante diffuse de ce champ. Il vient donc tout naturellement à l'idée d'essayer de construire un modèle d'approximation asymptotique qui permettrait de combiner ces deux aspects. L'une des approches est ce que l'on appelle la méthode des deux échelles (Two Scale Method - TSM). L'idée maîtresse est qu'une surface rugueuse dont le spectre bidimensionnel est  $W(K_x, K_y)$ , peut s'interpréter différemment selon que

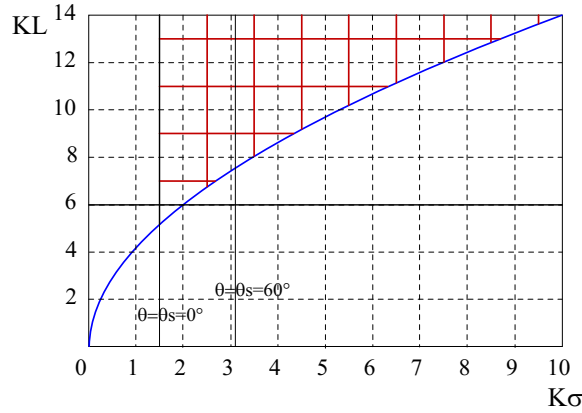


Figure 5.8 – Domaine de validité de l'approximation de Kichhoff, extrait de [21].

l'on traite les rugosités de basses échelles (fréquences spatiales basses) ou les rugosités d'échelles élevées (fréquences spatiales hautes). On pourra par exemple choisir un seuil de fréquences spatiales  $f_{seuil}$  qui sera appelé "cutoff" dans la littérature.

On considère dans un premier temps la composante basse échelle de la surface rugueuse, c'est à dire celle dont toutes les composantes fréquentielles supérieures à  $f_{seuil}$  ont été éliminées. Cela revient à lisser, sous la fréquence  $f_{seuil}$ , la surface rugueuse initiale. Statistiquement, on décrit cette surface par sa densité de probabilité de pentes  $P(Z_x, Z_y)$ . On peut ainsi calculer le coefficient  $\sigma_{\alpha\alpha_0}$  sur cette surface lissée en utilisant l'approximation KA-GO que l'on notera  $\sigma_{\alpha\alpha_0/KA-GO}$ .

Dans un second temps, pour une pente donnée, il est possible de calculer un coefficient de réflexion de type Fresnel correspondant à un plan ayant pour inclinaison cette pente  $(Z_x, Z_y)$ . En réalité, on va plutôt considérer ce plan en lui ajoutant les rugosités d'échelles élevées (hautes fréquences spatiales). Il devient alors possible d'estimer le coefficient  $\sigma_{\alpha\alpha_0}$  avec l'approche SPM en effectuant une rotation spatiale du problème correspondant à l'inclinaison de la pente. Ce coefficient sera noté  $\sigma_{\alpha\alpha_0/SPM}(Z_x, Z_y)$ . Comme on connaît la densité de probabilité des pentes  $(Z_x, Z_y)$ , il est possible de calculer l'espérance de ce coefficient  $\langle \sigma_{\alpha\alpha_0/SPM}(Z_x, Z_y) \rangle$ .

On obtient alors, dans le cadre de l'approximation TSM dite composite, le coefficient  $\sigma_{\alpha\alpha_0/TSM}$  tel que :

$$\sigma_{\alpha\alpha_0/TSM}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \sigma_{\alpha\alpha_0/KA-GO}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \langle \sigma_{\alpha\alpha_0/SPM}(Z_x, Z_y, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle \quad (5.42)$$

Le principe générale de l'approximation asymptotique TSM étant ainsi posé, cette théorie connaît de nombreux développements théoriques et s'applique à de nombreux contextes [33-36, 46, 62-65]. Par construction, cette approche s'avère extrêmement robuste et fournit une estimation du champ diffusé (composante spéculaire et composante diffuse) fiable pour des surfaces rugueuses très variées.

### L'approximation des petites pentes - SSA

Avec le même objectif, une autre démarche consiste à chercher un noyau  $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  tel que :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{Q_z} \int \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \quad (5.43)$$

qui permette à un formalisme unifié de donner des résultats compatibles avec les approches SPM et KA-GO sur leur domaine de validité respectif. Parmi ces approches, on peut citer la méthode des perturbations de phase (Phase-Perturbation Method - PPM) [66-68]. Plus récemment, A. V. Voronovich [37, 38, 50] a proposé une autre voie appelée approximation des petites pentes (Small Slope Approximation - SSA).

Si on prend pour noyau la matrice  $\mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  correspondant au noyau de Bragg du premier ordre dans l'approximation SPM et que l'on applique, comme pour KA-GO, l'approximation de la phase stationnaire, on obtient :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{Q_z} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \quad (5.44)$$

Nous obtenons alors l'approximation au premier ordre SSA1. On peut également construire un noyau à partir d'une combinaison linéaire des noyaux de Bragg d'ordre 1 et 2. On obtient alors l'approximation au second ordre SSA2 :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{Q_z} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{r}} \left( \mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - iQ_z \int \mathbb{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}) \tilde{h}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}} d\boldsymbol{\xi} \right) \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \quad (5.45)$$

où  $\mathbb{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi})$  est un noyau associé à la transformée de Fourier de  $h(\mathbf{r})$  tel que :

$$\mathbb{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} (\mathbb{B}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k} - \boldsymbol{\xi}) + \mathbb{B}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k} + \boldsymbol{\xi}) - \mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)) \quad (5.46)$$

A. G. Voronovich [38] a effectivement démontré que l'on obtenait alors une expression avec une précision d'ordre 2 selon les pentes de la surface rugueuses. D'une façon générale, le formalisme de SSA possède des relations d'invariance par rapport à la translation verticale et horizontale de la surface.

### L'approximation de courbure pondérée - WCA

On peut enfin évoquer une dernière approche appelée approximation de courbure pondérée (Weighted Curvature Approximation - WCA) [39]. Il s'agit toujours d'une approche recherchant un noyau unificateur entre SPM et KA. Cette approximation prend la forme suivante :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{Q_z} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{r}} (\mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - \mathbb{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; -Q_z \nabla h)) \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \quad (5.47)$$

avec :

$$\mathbb{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{B}_1(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{k}}_0) \quad (5.48)$$

où

$$\tilde{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}_0 + \boldsymbol{\xi}}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{k}}_0 = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}_0 - \boldsymbol{\xi}}{2} \quad (5.49)$$

On notera que ce nouveau noyau vérifie les propriétés :

$$\mathbb{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{0}) = 0 \quad (5.50a)$$

$$\nabla \mathbb{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{0}) = 0 \quad (5.50b)$$

$$\mathbb{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{Q}_h) = \mathbb{B}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - \mathbb{K}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \quad (5.50c)$$

Celles-ci permettent de montrer que dans les conditions limites des domaines de validité des deux approches historiques, l'approximation WCA converge soit vers SPM1 soit vers KA-GO, ce qui est effectivement recherché.

Certaines publications scientifiques ont cherché à établir des comparaisons numériques de méthodes parmi le foisonnement des différentes approches méthodologiques en s'appuyant sur des surfaces rugueuses gaussiennes de référence. On citera à titre d'exemple la publication de G. Soriano [69].

#### 5.2.4 Application à la diffusion électromagnétique par des surfaces de mer

Déterminer la diffusion électromagnétique par les surfaces maritimes, pour des besoins de télédétection par moyen radar et autres systèmes micro-ondes, s'avère un enjeu crucial dans les problématiques d'observation du trafic maritime, du contrôle des zones côtières, d'analyse des dynamiques océanographiques,... Or, en terme de modélisation physique, il semble très naturel d'assimiler une surface de mer à une surface rugueuse et d'appliquer les approximations asymptotiques que nous venons de voir. Pour cela, il suffit de fournir les caractéristiques statistiques de ces surfaces nécessaires en fonction des conditions de mer (en particulier la vitesse et la direction du vent). Toutefois, avant toute chose, il faut prendre conscience qu'une surface maritime découle de nombreux phénomènes physiques non-linéaires qui induisent une géométrie globale de la surface sur des échelles spatiales très différentes, voir figure 5.9. Il serait illusoire de chercher des modèles capables d'unifier les différentes descriptions des vagues sur l'intégralité de l'ensemble du spectre des phénomènes.

Pour les applications de télédétection par micro-onde, on restreint l'étude au spectre des vagues de gravité (et d'ultra-gravité) d'une part et au spectre des vagues de capillarité. Les premières sont pour l'essentielle induite par les phénomènes de houle. Les secondes par l'influence immédiate du vent à la surface de la mer (vent de friction). Ces deux niveaux d'échelles se retrouve de façon très naturelle dans l'approximation asymptotique TSM.

#### Caractérisation statistique des surfaces de mer

Concrètement, les caractéristiques de mer les plus utiles sont la densité de probabilité de pentes et le spectre des surfaces maritimes.

**Densité de probabilité de pentes** En première approche, il est envisageable d'assimiler la distribution des pentes d'une surface de mer à une distribution gaussienne  $P(Z_x, Z_y)$ . On cherche alors à identifier les deux paramètres  $\sigma_u^2$  et  $\sigma_c^2$  qui sont respectivement les variances des pentes de la surface privée des vagues de capillarité, respectivement dans la direction du vent et la direction travers au vent. A partir de mesures photographiques du scintillement du soleil sur la mer, ces deux

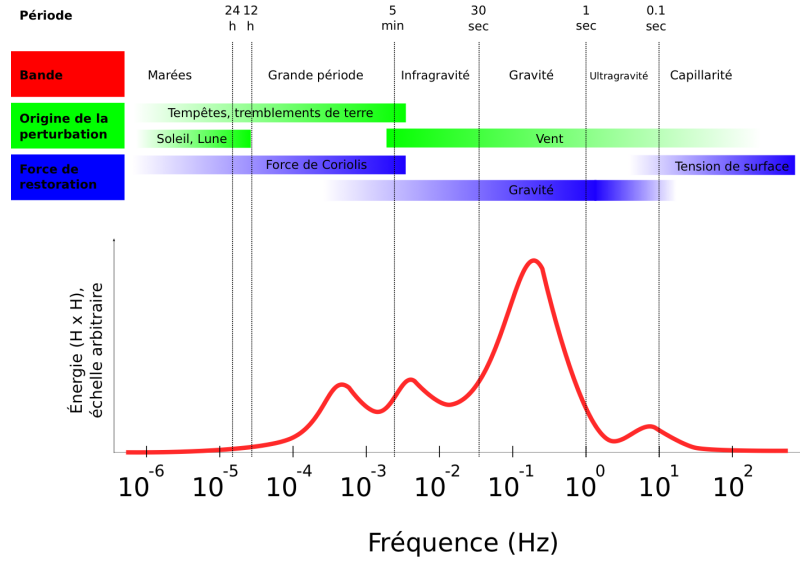


Figure 5.9 – Classification des vagues en fonction de leur période, et des forces à leur origine, traduit et adapté de Kinsman [70], extrait de [71].

paramètres ont été identifiés par C.S. Cox et W.H. Munk [72]. Ils ont ainsi proposé un modèle gaussien empirique (Slick Sea Model-SSM) tel que :

$$\begin{cases} \sigma_u^2 = 0.005 + 0.78 \cdot 10^{-3} U_{12.5} \\ \sigma_c^2 = 0.003 + 0.84 \cdot 10^{-3} U_{12.5} \end{cases} \quad (5.51)$$

$U_{12.5}$  (m/s) étant la vitesse du vent enregistrée à l'altitude de 12.5 mètres au dessus de la mer. Pour une mer prenant en compte les vagues de capillarité (Clean Sea Model-CSM) les variances sont telles que :

$$\begin{cases} \sigma_u^2 = 3.16 \cdot 10^{-3} U_{12.5} \\ \sigma_c^2 = 0.003 + 1.92 \cdot 10^{-3} U_{12.5} \end{cases} \quad (5.52)$$

En réalité, un modèle gaussien n'est pas idéal pour décrire les pentes d'une surface de mer dans la mesure où ce modèle implique une parité de la fonction densité. Or, on constate aisément qu'en présence de vent, il y a une dissymétrie entre les pentes positives et négatives (l'avant de la vague est plus raide que le revers). Cette asymétrie s'accroît pour les vents élevés. C.S. Cox et W.H. Munk [72, 73] ont donc proposé un modèle plus élaboré en introduisant un facteur de déformation des pentes  $F_{CM}$  [71] :

$$\text{Prob}(\mathcal{P}_u, \mathcal{P}_c) = \underbrace{\frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_c} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[ \frac{\mathcal{P}_u^2}{\sigma_u^2} + \frac{\mathcal{P}_c^2}{\sigma_c^2} \right]\right)}_{\text{Gaussienne}} \underbrace{F_{CM}(\mathcal{P}_u, \mathcal{P}_c)}_{\text{déformation}} \quad (5.53)$$

La figure (5.11) nous montre l'évolution de la distribution des pentes en fonction de la vitesse du vent.

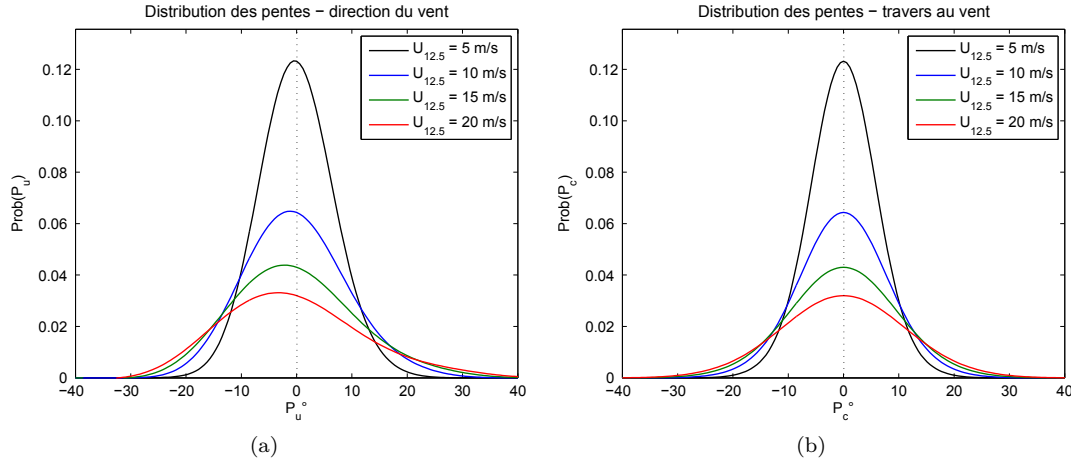


Figure 5.10 – Distribution des pentes de Cox et Munk.

**Spectre de mer** Pour décrire le contenu spectral  $W(K, \phi)$  des surfaces de mer, il existe de très nombreux modèles, dont un des plus anciens est le spectre de O.M. Philips [74] qui ne tient malheureusement pas compte des conditions de vent [75]. Le spectre de Pierson-Moskowitz fait aussi partie des premiers spectres permettant de présenter la surface de mer [76], néanmoins, celui-ci reste limité aux vagues de gravités. D'autres spectres, plus modernes, permettent d'intégrer un spectre plus complet. Nous pouvons citer les spectres de Fung-Lee [77] et d'Elfouhaily [78]. Pour ma part, c'est ce dernier spectre qui a constitué le modèle spectral de référence dans le cadre de mes activités de recherche.

Le spectre d'Elfouhaily unifie dans un seul modèle deux spectres adaptés pour les vagues de gravité (basses fréquences) et pour les vagues de capillarité (hautes fréquence). Ce spectre est de la forme  $W(K, \phi) = \zeta(K)\mathcal{D}(K, \phi)$ . Son expression explicite est donnée par sa partie non-directionnelle :

$$\zeta(K) = \frac{[B_b(K) + B_h(K)]}{K^3} \quad (5.54)$$

où  $l$  et  $h$  correspondent respectivement aux basses et aux hautes fréquences. Ces deux spectres sont paramétrés par  $\Omega_{wa}$ , l'âge inverse des vagues adimensionné (non-dimensional inverse wave age), qui est une donnée d'entrée du spectre :  $0.84 \leq \Omega_{wa} \leq 5$ , la valeur 0.84 correspondant à une mer pleinement développée. Les deux composantes  $B_l$  et  $B_h$  sont données par :

$$B_b(K) = \frac{1}{2} \alpha_b \frac{c_b}{c(K)} F_b \quad (5.55)$$

$$B_h(K) = \frac{1}{2} \alpha_h \frac{c_h}{c(K)} F_h \quad (5.56)$$

Les paramètres pour la partie de basse fréquence sont :

- $\alpha_b = 6 \cdot 10^{-3} \sqrt{\Omega_{wa}}$  avec  $0.84 \leq \Omega_{wa} \leq 5$
- $c(K) = [g_0 (1 + K^2/K_m^2) / K]^{\frac{1}{2}}$  avec  $K_m = 363 \text{ rad/m}$
- $c_b = c(K_b) = V_{10} / \Omega_{wa}$  avec  $K_b = g_0 \Omega_{wa}^2 / V_{10}^2$



- $F_b = L_{PM} \gamma_J^{r_J} \exp\left(-\frac{\Omega_{wa}}{\sqrt{10}} \left[\sqrt{\frac{K}{K_b}} - 1\right]\right)$
- $L_{PM}$  est le “spectre de forme” de Pierson :  $L_{PM} = e^{-5K_p^2/(4K^2)}$
- $\gamma_J^{r_J}$  est le “facteur d’amélioration” proposé par Hasselmann et al. [79] dans le spectre JONSWAP, avec des valeurs modifiées :
- $\gamma_J = 1.7$  si  $0.84 < \Omega_{wa} < 1$  ou  $\gamma_J = 1.7 + 6 \log \Omega_{wa}$  si  $1 \leq \Omega_{wa} < 5$
- $r_J = e^{-\left(\sqrt{K/K_b}-1\right)^2/(2\sigma_J^2)}$
- $\sigma_J = 0.08 (1 + 4\Omega_{wa}^{-3})$

Les paramètres pour la partie de haute fréquence sont :

- $\alpha_h = 0,01 \begin{cases} 1 + \ln [V_0/c_h] & V_0 \leq c_m \\ 1 + 3 \ln [V_0/c_h] & V_0 > c_m \end{cases}$
- $c_h = \sqrt{2g/K_h}$
- $F_h = \exp\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{K}{K_m} - 1\right)^2\right)$

où  $V_0$  désigne la vitesse du vent de friction sur la surface.

La fonction de répartition angulaire  $\mathcal{D}(K, \phi)$

$$\mathcal{D}(K, \phi) = \frac{1}{2\pi} [1 + \Delta(K) \cos 2\phi] \quad (5.57)$$

où

$$\Delta(K) = \tanh \left[ a_0 + a_b (c/c_b)^{2,5} + a_h (c/c_h)^{2,5} \right] \quad (5.58)$$

avec les paramètres :

- $a_0 = (\ln 2)/4$
- $a_b = 4$
- $a_h = 0,13V_0/c_h$

Le spectre d’Elfouhaily représente clairement un degré de sophistication bien plus élevé que celui des premiers spectres, et on peut constater une grande cohérence avec les mesures expérimentales [71]. La figure 5.11, nous en donne une représentation plus intuitive.

### Caractérisation électrique de l’eau de mer

Décrire la géométrie des surfaces de mer constitue une étape importante pour modéliser le champ électromagnétique diffusé par cette surface. Cependant, il reste nécessaire de caractériser électriquement l’eau de mer. Il est possible dans un premier de considérer que l’eau de mer salée possède un niveau de conductivité électrique important, assimilable à une interface parfaitement conductrice. Pour un modèle plus réaliste, on cherchera à modéliser sa permittivité électrique en fonction de différents paramètres physiques (taux de salinité et température en particulier).

La permittivité relative de l’eau de mer dépend en effet de la fréquence d’onde électromagnétique ( $f$ ), de la salinité ( $\varsigma$ ) et de la température ( $\Gamma$ ) de la mer. Avec le modèle de Debye [80], cette permittivité se présente sous la forme :

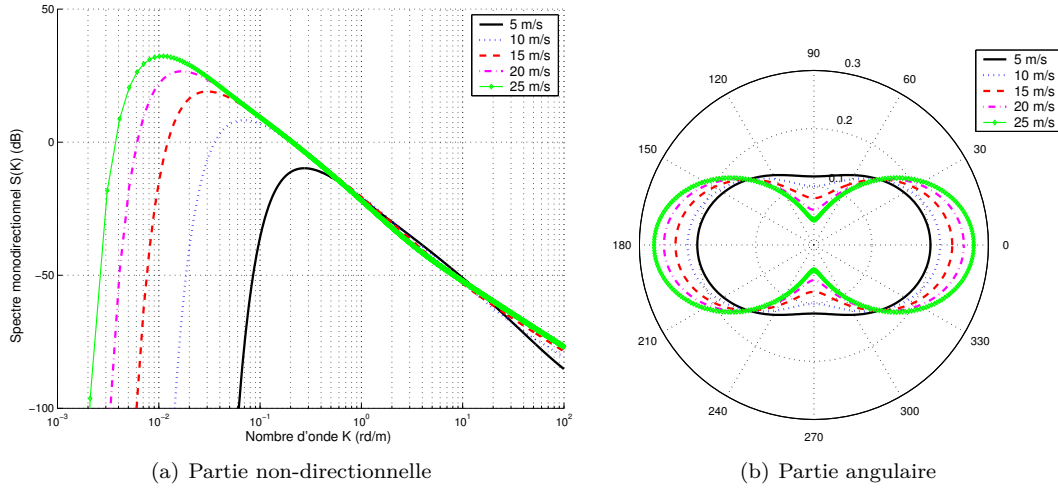


Figure 5.11 – Spectre d'Elfouhaily.

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} - i \frac{\sigma_s}{\omega\epsilon_A} \quad (5.59)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, l'équation (5.59) peut être écrite sous la forme :

$$\epsilon_r = \underbrace{\epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (\omega\tau)^2}}_{\epsilon'} - i \underbrace{\left[ \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} + \frac{\sigma_s}{\omega\epsilon_A} \right]}_{\epsilon''} \quad (5.60)$$

où :

- $\omega = 2\pi f$  (rad/s) est la pulsation de l'onde électromagnétique incidente
- $\epsilon_A = 8,854 \cdot 10^{-12}$  (F/m) est la constante diélectrique du vide
- $\epsilon_s$  est la permittivité relative statique, donnée par la relation

$$\epsilon_s = \epsilon_s(\Gamma, \zeta) = \epsilon_s(\Gamma, 0)a(\Gamma, \zeta) \quad (5.61)$$

$$\epsilon_s(\Gamma, 0) = 87,134 - 1,949 \cdot 10^{-1}\Gamma - 1,276 \cdot 10^{-2}\Gamma^2 + 2,491 \cdot 10^{-4}\Gamma^3 \quad (5.62)$$

$$a(\Gamma, \zeta) = 1 + 1,613 \cdot 10^{-5}\Gamma\zeta - 3,656 \cdot 10^{-3}\zeta + 3,21 \cdot 10^{-5}\zeta^2 - 4,232 \cdot 10^{-7}\zeta^3 \quad (5.63)$$

- $\epsilon_\infty = 4,9$  est la permittivité relative pour la fréquence infinie
- $\tau$  est le temps de relaxation, donné par :

$$\tau = \tau(\Gamma, \varsigma) = \tau(\Gamma, 0)b(\Gamma, \varsigma)/2\pi \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \tau(\Gamma, 0) &= 1,1109 \cdot 10^{-10} - 3,824 \cdot 10^{-12}\Gamma + \\ & 6,398 \cdot 10^{-14}\Gamma^2 - 5,096 \cdot 10^{-16}\Gamma^3 \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} b(\Gamma, \varsigma) &= 1 + 2,282 \cdot 10^{-5}\Gamma\varsigma - 7,638 \cdot 10^{-4}\varsigma - \\ & 7,760 \cdot 10^{-6}\varsigma^2 + 1,105 \cdot 10^{-8}\varsigma^3 \end{aligned} \quad (5.66)$$

- $\sigma_s$  est la conductivité statique, donnée par

$$\sigma_s = \sigma_s(\Gamma, \varsigma) = \sigma_s(25, \varsigma) \exp(\Lambda) \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s(25, \varsigma) &= \varsigma(1,8252 \cdot 10^{-1} - 1,4619 \cdot 10^{-3}\varsigma + \\ & 2,093 \cdot 10^{-5}\varsigma^2 - 1,282 \cdot 10^{-7}\varsigma^3) \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Delta\{2,033 \cdot 10^{-2} + 1,266 \cdot 10^{-4}\Delta + 2,464 \cdot 10^{-6}\Delta^2 - \\ & \varsigma(1,849 \cdot 10^{-5} - 2,551 \cdot 10^{-7}\Delta + 2,551 \cdot 10^{-8}\Delta^2)\} \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\Delta = 25 - \Gamma \quad (5.70)$$

En utilisant ces formulations, nous pouvons tracer les valeurs de la permittivité relative de l'eau en fonction de la salinité, la température et la fréquence. Nous comparons le cas de l'eau de mer de salinité moyenne ( $\varsigma = 35$  g/kg) avec l'eau douce de salinité nulle<sup>1</sup> ( $\varsigma = 0$  g/kg). La gamme de fréquence est choisie entre  $10^8$  Hz et  $10^{12}$ Hz avec deux valeurs de température 0°C et 20°C.

La figure 5.12 fournit quelques simulations numériques de ce modèle. Il est à noter qu'il existe également le modèle Cole-Cole qui est une variante de celui de Debye et que l'on pourra trouver dans [81, 82].

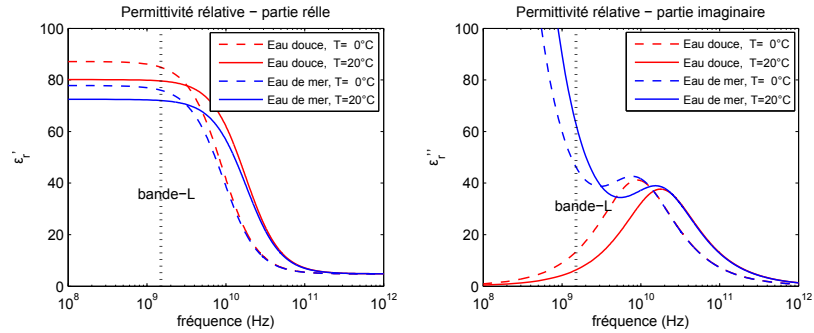


Figure 5.12 – La permittivité de l'eau (parties réelle et imaginaire) en fonction de la fréquence, la salinité et la température.

### 5.2.5 Mes activités de recherche dans le domaine de la diffusion par des surfaces de mer vues comme des surfaces rugueuses

L'essentiel de mon activité de recherche sur la diffusion électromagnétique par des surfaces maritimes en prenant le point de vue des surfaces rugueuses et des approximations asymptotiques

1. En réalité, l'eau douce a une salinité allant de 0 à 0.5 g/kg.

s'est concrétisée par l'encadrement de trois thèses réalisées sous la direction de A. Khenchaf. La première, menée par A. Awada [21], concernait l'étude des modèles asymptotiques et leur lien avec les caractéristiques de la mer. La deuxième, menée par N. Sajjad [83], portait sur le problème spécifique des ondes incidentes rasantes dans ce contexte. Enfin, la dernière, menée par M.Y. Ayari [84], cherchait à caractériser l'influence de la pollution d'hydrocarbure dans ce contexte.

### Modèles asymptotiques pour les surface de mer

Évaluer la pertinence d'un modèle asymptotique ou comparer plusieurs modèles entre eux dans le contexte maritime s'avère une tâche très vaste et pour laquelle il ne peut y avoir de réponse exhaustive. Il faut commencer par déterminer la fréquence ou la bande de fréquences utilisée. Dans le domaine de la télédétection, les bandes de fréquences les plus utilisées sont les bandes L (1 à 2 GHz), S (2 à 4 GHz), C (4 à 8 GHz) et X (8 à 12.5 GHz), mais, depuis quelques années, les bandes de fréquence supérieures sont de plus en plus fréquemment employées Ku (12.5 à 18 GHz), K (18 à 26.5 GHz), Ka (26.5 à 40 GHz) voire millimétrique. Par ailleurs, une mesure ne peut se faire qu'en précisant les angles d'incidence et les angles de diffusion, 5.13, ce qui laisse un choix infini dans les configurations géométriques à considérer. On peut considérer deux types de configurations particulières. Le premier est le cas des configurations monostatiques où l'émetteur et le récepteur se situent au même endroit ( $\theta_s = \theta$  et  $\psi_s = \psi + 180^\circ$ ). Cette configuration est aussi dite de rétrodiffusion. Le second cas concerne les configurations dans lesquelles le récepteur se trouve dans la direction spéculaire de la réflexion ( $\theta_s = \theta$  et  $\psi_s = \psi$ ). Tous les autres cas sont dénommés des configurations bistatiques sans plus de précisions. Les configurations du problème peuvent dépendre de la vitesse du vent, de sa direction, de la température et de la salinité, tout en éliminant des contextes particuliers comme la proximité des côtes par exemple. Il est donc clair que toute étude paramétrique ne peut être que limitée.

Un autre point concerne la validation des résultats numériques obtenus. Cette validation peut se faire en comparant les modèles entre eux et en analysant leur cohérence. On peut comparer les résultats des modèles à des données expérimentales, quand elles sont disponibles ce qui est loin d'être toujours le cas. Ces données ne sont d'ailleurs pas dénuées de tout biais expérimentaux ou d'erreur de mesures. On peut enfin comparer les méthodes asymptotiques à des simulations numériques obtenues par des approches génériques (comme les méthodes des moments, les différences finies ou les éléments finies).

La validation des modèles n'est pas le seul objectif de ces études paramétriques. On peut aussi chercher à comprendre l'influence d'un paramètre particulier sur l'ensemble du phénomène.

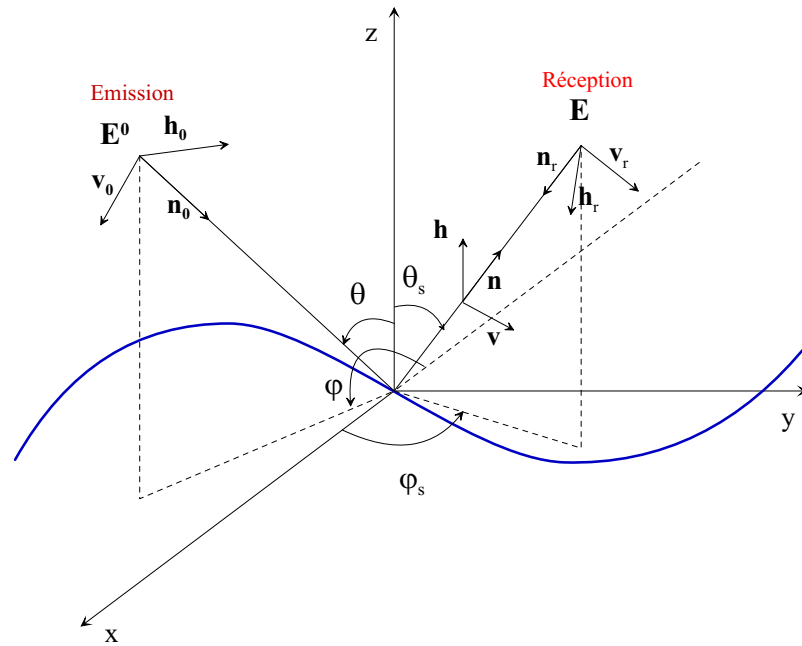


Figure 5.13 – Configuration géométrique pour la diffusion par une surface de mer en émission-réception.

**Configuration monostatique** La configuration monostatique est clairement la plus simple expérimentalement et celle pour laquelle on dispose le plus de données. L'une des études numériques réalisées concerne des simulations, avec une fréquence de 14 GHz, pour une vitesse de vent de 5 m/s, avec une propagation dans le sens du vent (upwind), voir figures 5.14 et 5.15. Les modèles asymptotiques sont comparés entre eux et aussi à un modèle semi-empirique appelé SASS-II [85], issu de mesures expérimentales faites par la NASA. Globalement, on constate une certaine cohérence des différents modèles sauf pour la SPM dans la direction spéculaire et pour la KA-GO hors direction spéculaire, ce qui est tout à fait conforme à la théorie.

De même, toujours à la fréquence de 14 GHz, cette thèse a permis de mettre en évidence l'influence de la vitesse du vent, figure 5.16 et 5.17, et sa direction, figure 5.18, en comparant à des données expérimentales [86].

**Configuration bistatique** Beaucoup d'études paramétriques différentes ont été réalisées dans des configurations monostatiques, en propagation avant ou en configurations bistatiques. On peut retrouver ces différents travaux dans [21, 87-93]. Une étude en configuration bistatique a été particulièrement remarquable [21, 94], car elle a montré que l'approximation SSA-1 donnait des incohérences sous certains angles, voir figure 5.19.

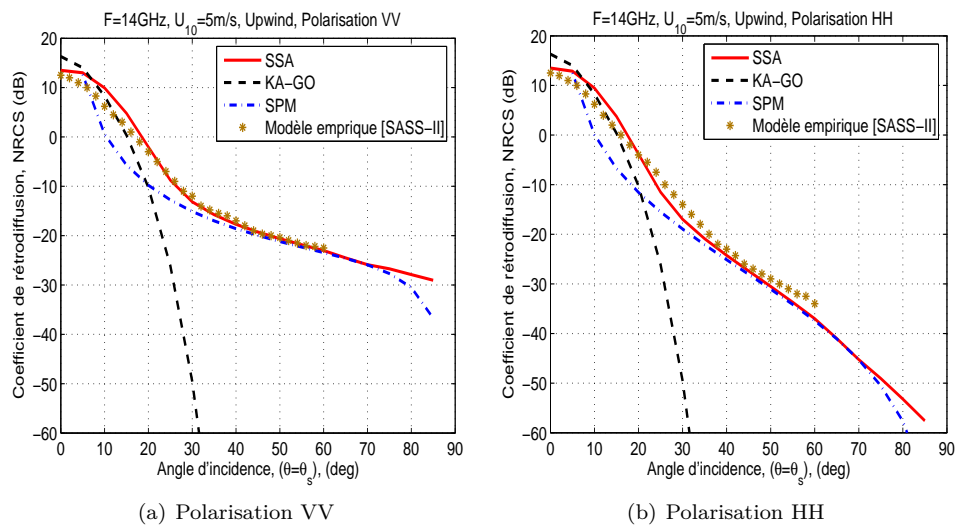


Figure 5.14 – Variation du coefficient de rétrodiffusion en fonction de l'angle d'incidence dans le cas upwind, extraite de [21].

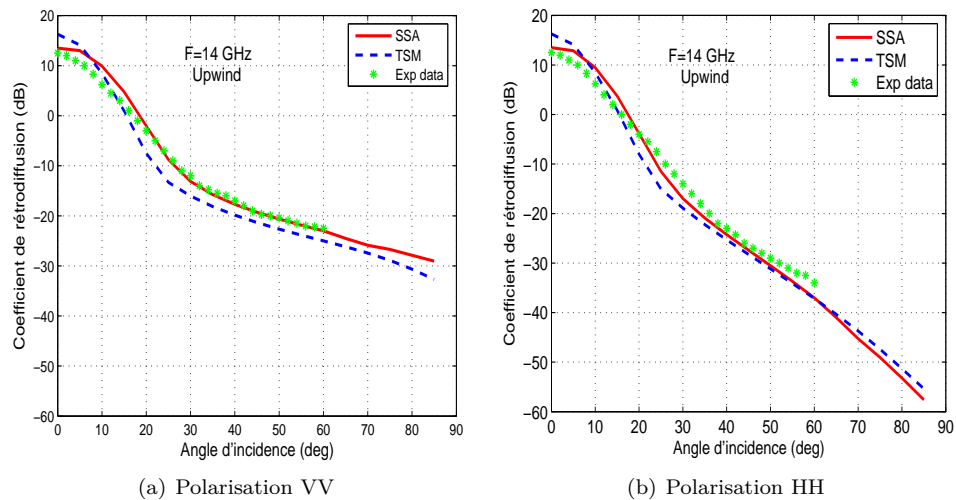


Figure 5.15 – Comparaison entre SSA-1 et TSM avec des données expérimentales pour une vitesse du vent  $U_{10} = 5$  m/s, extraite de [21].

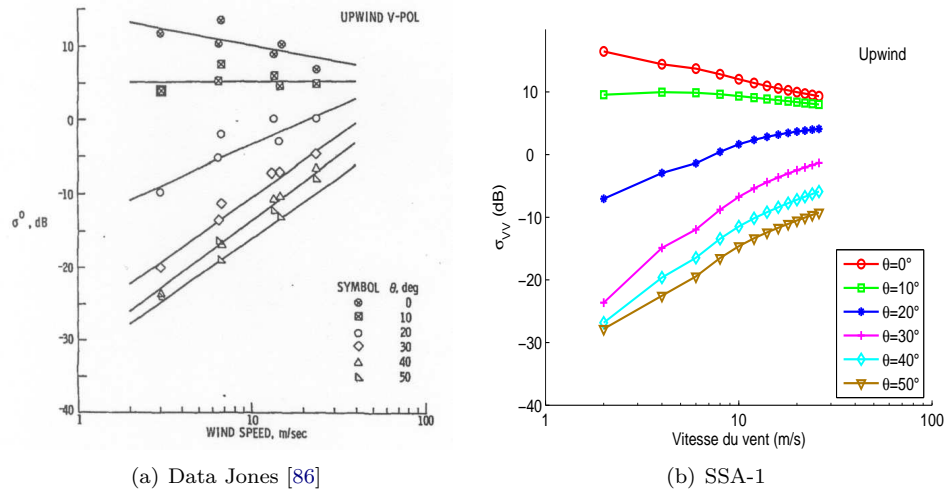


Figure 5.16 – Variations du coefficient de rétrodiffusion  $\sigma_{vv}$  en fonction de la vitesse du vent pour un angle d'incidence  $\theta \in [0^\circ, 50^\circ]$  dans le cas upwind, pour une fréquence de 13.9 GHz, comparaison avec des mesures expérimentales publiées par Jones [86], extraite de [21].

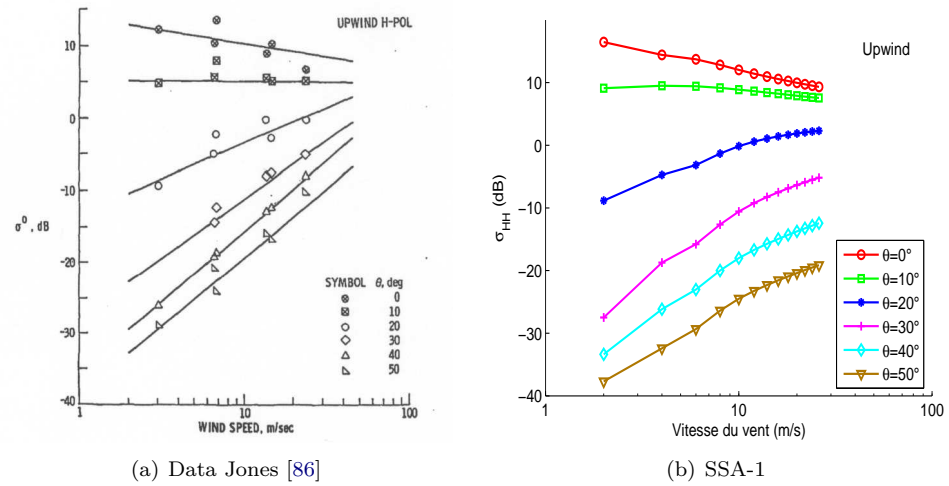


Figure 5.17 – Variations du coefficient de rétrodiffusion  $\sigma_{hh}$  en fonction de la vitesse du vent pour un angle d'incidence  $\theta \in [0^\circ, 50^\circ]$  dans le cas upwind, pour une fréquence de 13.9 GHz, comparaison avec des mesures expérimentales publiées par Jones [86], extraite de [21].

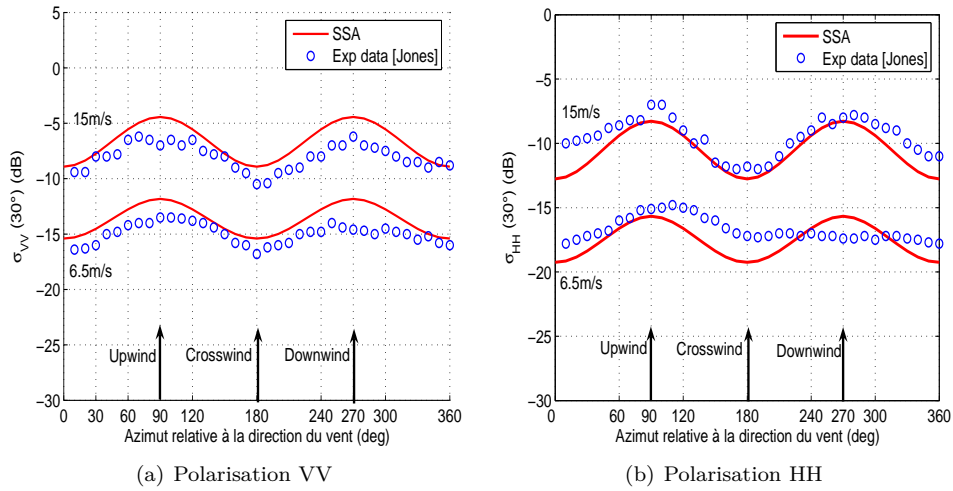


Figure 5.18 – Variations du coefficient de rétrodiffusion en fonction de la direction du vent pour un angle d'incidence  $\theta = 30^\circ$  et pour une fréquence de 13.9 GHz : comparaison avec des mesures expérimentales publiées par Jones [86], extraite de [21].

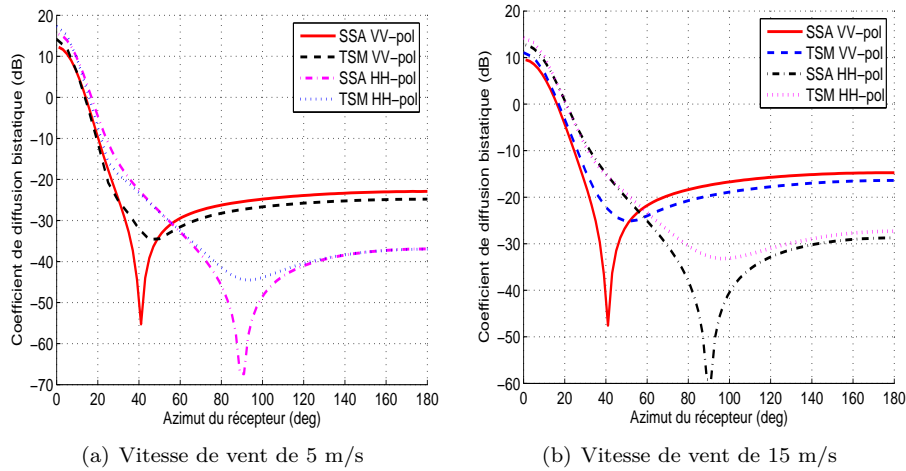


Figure 5.19 – Coefficients de diffusion bistatique : comparaison entre SSA-1 et TSM pour une fréquence de 14 GHz et pour  $\theta = \theta_s = 60^\circ$ ,  $\psi = 0^\circ$  en faisant varier  $\psi_s$  entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  pour une vitesse du vent égale à 5 m/s ou à 15 m/s, extraite de [21].



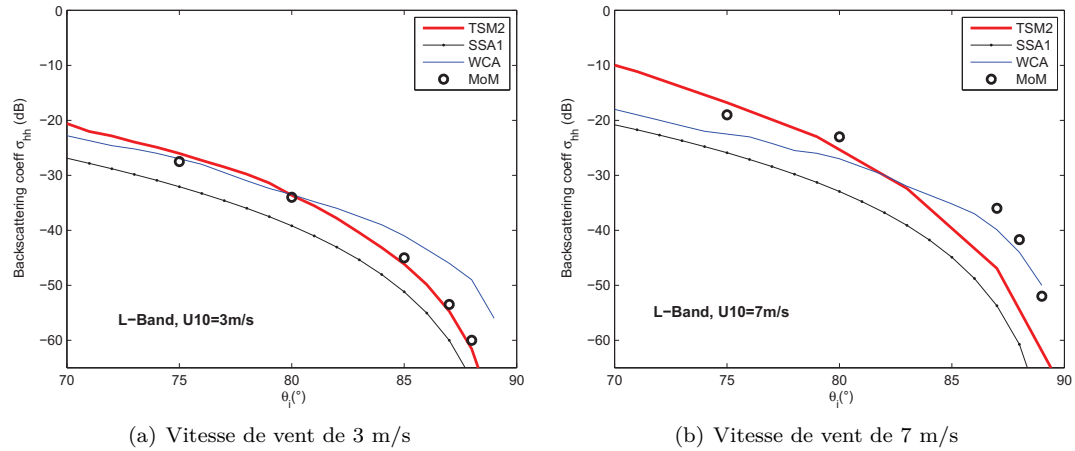


Figure 5.20 – Coefficients de diffusion monostatique : comparaison entre SSA-1, WCA, TSM-2 et des simulations numériques (MoM) pour une fréquence de 1.5 GHz et pour  $\theta \in [70^\circ, 90^\circ]$  pour une vitesse du vent faible et modérée, extraite de [83].

### Diffusion par des surfaces rugueuses en incidence rasante

Les études paramétriques et la comparaison avec les données expérimentales ou simulées montrent une difficulté particulière lorsque l'onde incidence est rasante, avec des difficultés très importantes pour  $\theta \in [80^\circ, 90^\circ]$ . L'étude réalisée par N. Sajjad [83] a été d'évaluer comment les modèles classiques se comportaient dans ces configurations et surtout de voir dans quelle mesure le passage d'un modèle TSM-1 à un modèle TSM-2 (on utilise alors le formalisme SPM-2 dans l'approche TSM) permettait d'améliorer la modélisation en configuration rasante. Cette étude a été réalisée sur des modèles de surfaces terrestres (surfaces rugueuses gaussiennes) et sur des surfaces de mers (spectre d'Elfouhaily). On peut retrouver l'intégralité des résultats obtenus dans sa thèse [83] et parmi l'ensemble de ses publications en conférence ou en revue [95-100]. Pour illustrer ce travail, on peut reprendre l'un des résultats obtenus en bande de fréquence L et en configuration monostatique, voir figure 5.20.

On constate, dans ce cas de figure, que la modélisation TSM-2 est plus performante que les autres pour les vents faibles et que pour les vents modérés, les modèles TSM-2 et WCA peuvent être prioritairement retenus. Toutefois, l'étude menée par N. Sajjad a mis en lumière toute la complexité de la problématique et a montré qu'il était difficile, suivant les paramètres choisis, de conclure définitivement.

### Diffusion électromagnétique par des mers polluées

La détection et la surveillance des zones maritimes contaminées par un polluant constitue un enjeu environnemental considérable et cette problématique devient à l'échelle mondiale de plus en plus prégnante. La thèse M.Y. Ayari s'inscrit tout à fait dans cette thématique. L'objectif était de déterminer le niveau de détectabilité, et dans certains la non-détectabilité, de cette pollution maritime par des dispositifs micro-ondes. La nature des polluants peut bien évidemment être de nature très différente suivant les circonstances (concentration de déchets plastiques, développement

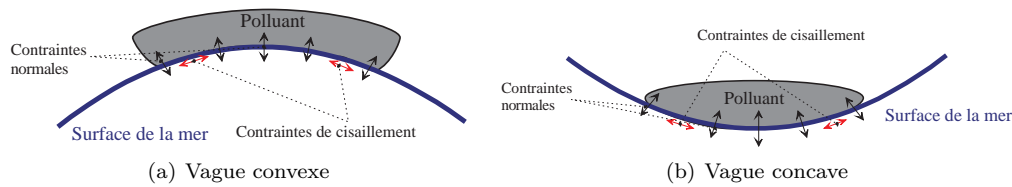


Figure 5.21 – Contraintes exercées par le polluant sur la surface de la mer, extraite de [84].

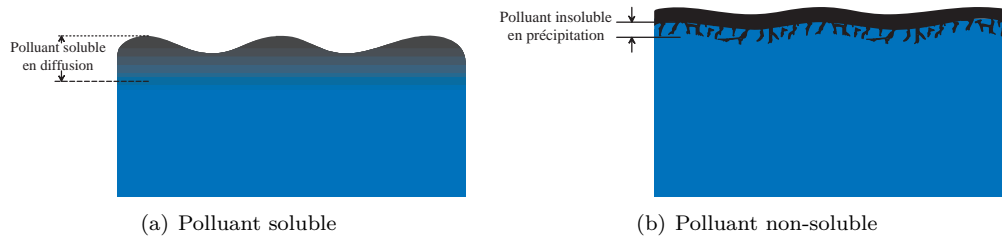


Figure 5.22 – Représentation schématique des deux classes de polluant, extraite de [84].

de substances organiques, hydrocarbures, autres substances industrielles,...). Dans le cadre de cette thèse [84], seul le cas de pollution par hydrocarbure a été étudié en considérant deux cas de figure. Le premier cas correspond à un polluant formant une fine couche sur la surface qui modifie la rugosité mais qui ne modifie pas la permittivité du milieu à l'échelle de la longueur d'onde. Dans le second cas, on considère plutôt un polluant formant une émulsion avec l'eau de mer ce qui influe sur la permittivité mais qui aura peu d'influence sur l'état de surface. D'autres choix d'hypothèses peuvent bien sûr être faits. Il serait possible de traiter un polluant formant une couche d'épaisseur significative en surface, voir sur ce sujet les travaux de N. Pinel [101]. Des avancées plus récentes pourront également être trouvées dans les travaux de A. Mainvis [102].

**Film polluant en surface** Un film polluant sur une surface de mer va agir sur les tensions superficielles, la viscosité et viscoélasticité du fluide, ce qui va avoir des conséquences importantes sur les contraintes normales et de cisaillement au niveau des vagues, voir illustration schématique figure 5.21. Ces contraintes impliquent une modification du spectre de mer et on définit le rapport d'atténuation spectrale  $y(K)$  tel que :

$$y(K) = \frac{W_{cl}(K)}{W_{po}(K)} \quad (5.71)$$

où  $W_{cl}(K)$  est le spectre de mer sans polluant (clean) et  $W_{po}(K)$  est le spectre de mer de la surface polluée.

Pour modéliser la fonction d'atténuation  $y(K)$ , nous nous sommes appuyés sur les différents travaux physico-chimique de R. Cini et P.P. Lombardini [103-108] qui ont exprimé cette atténuation spectrale sous une forme générale. Ils identifient deux classes de caractéristiques : les polluants solubles comme les agrégats biologiques et les polluants non-solubles comme les hydrocarbures, voir illustration figure. La forme générale de l'atténuation spectrale est :

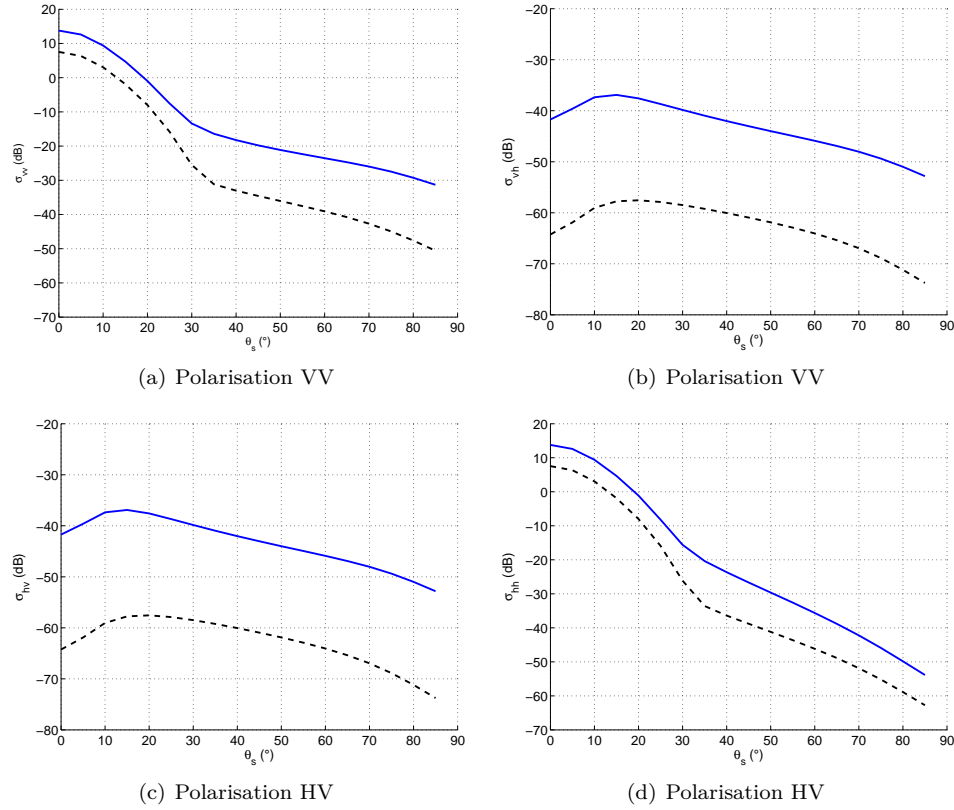


Figure 5.23 – Coefficients de rétrodiffusion de surface océanique (trait continu) et surface polluée (trait discontinu) en fonction de l'angle d'observation  $\theta_s = \theta$  en utilisant l'approximation TSM, extraite de [84].

$$y(f) = \frac{S_p(f)}{S_c(f)} = \frac{1 \pm 2\tau + 2\tau^2 - X + Y(X + \tau)}{1 \pm 2\tau + 2\tau^2 - 2X + 2X^2} \quad (5.72)$$

Le signe + correspond aux polluants solubles et le signe - aux polluants non-solubles, avec :

$$\tau = \left(\frac{\omega_D}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} ; X = \frac{\epsilon_0 k^2}{\rho(2\eta\omega^3)^{1/2}} ; Y = \frac{\epsilon_0 k}{4\eta\rho\omega} \quad (5.73)$$

où  $\omega$ ,  $\omega_D$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\rho$  et  $\eta$  sont des paramètres caractérisant le polluant.

Il devient alors possible de réaliser des études paramétriques en ajoutant aux paramètres maritimes classiques des nouveaux paramètres liés au polluant. Parmi les nombreuses résultats obtenus [84], on peut citer ceux correspondant à une pollution par du pétrole, en configuration monostatique, à une fréquence de 15.46 GHz, pour un vent de 5 m/s, voir figure 5.23.

**Émulsion mer-polluant** Dans le cas, des émulsions, nous avons admis que l'état de surface n'était pas modifiée. En revanche, le polluant engendre une modification de la permittivité. Le

polluant (huile, pétrole, ...) se trouve en phase dispersée sous forme de gouttelettes dans une phase eau continue. Pour une mer polluée, ces mélanges sont maintenus dispersés par agitation permanente alimentée par les vagues sous l'effet du vent de surface. Ces polluants ont très peu d'effet sur l'état de la surface de la mer. Cette émulsion se distingue par ses propriétés diélectriques qui dépendront du pourcentage de polluant dans l'eau. En général, les différentes formes de relaxation établies à propos des lois de mélange considèrent que les inclusions ont des formes sphériques, cylindriques, ellipsoïdes ou lamellaires, etc. Malheureusement, cette façon de procéder ne correspond pas toujours à la réalité physique. Toutes ces approches montrent qu'il est très difficile de définir une théorie (ou loi) générale.

Dans ces travaux de thèse [109], K. Lamkaouchi a présenté un ensemble de résultats de mesures de permittivité. Ses résultats ont été obtenus dans le domaine hyperfréquences sur des mélanges d'eau salée et de pétrole maintenus artificiellement en émulsion par agitation permanente. En se fondant sur ces travaux, nous avons pu réaliser des études paramétriques. L'une d'elles, en configuration monostatique, pour une fréquence de 10 GHz et une vitesse de vent de 20 m/s (vent fort), traite de l'effet de la concentration en pétrole sur la rétrodiffusion, voir figure 5.24.

On peut retrouver l'intégralité des résultats obtenus par M.Y. Ayari dans sa thèse [84] et parmi l'ensemble de ses publications en conférence ou en revue [110-115].

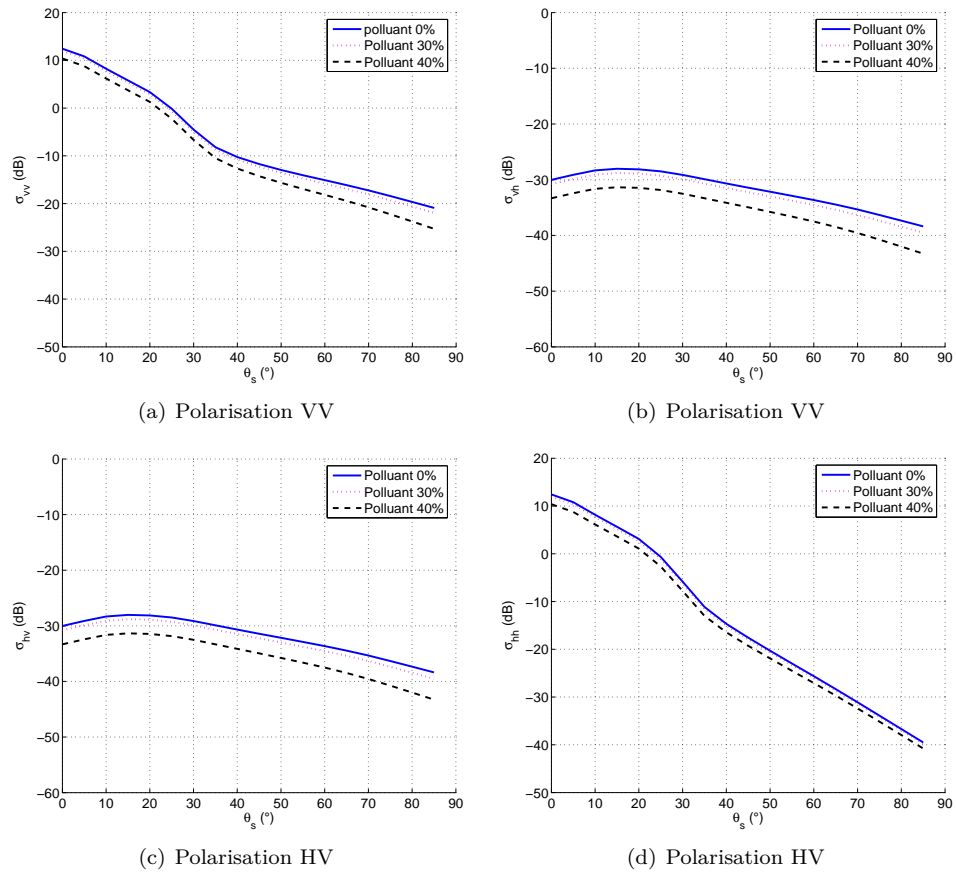


Figure 5.24 – Coefficient de retrodiffusion en fonction de l'angle observé  $\theta_s$  pour trois surfaces en émulsion (0, 30 et 40 % de polluant dans l'eau), extraite de [84].

### 5.3 De la surface rugueuse au fort relief

Les approximations asymptotiques de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses tendent à ramener le relief de cette surface, par essence limitée, à une simple interface dont le comportement électromagnétique complexe serait intégré, en posant des hypothèses simplificatrices, à la surface plane. En ce sens, ces approches pourraient s'interpréter comme une recherche de modélisation par une "texture électromagnétique" de la surface rugueuse. Dans le cadre de mes activités à l'Union internationale des télécommunications (UIT) ou International Telecommunication Union (ITU), et en relation avec l'Agence Nationale des Fréquences (ANFR), j'ai aussi été confronté à la problématique inverse où l'élévation était au contraire de la rugosité extrêmement importante. Le processus de diffusion des ondes électromagnétiques correspondait davantage à de la diffraction par des sommets. Plus précisément, la problématique était de modéliser les communications entre des drones volant dans un milieu à fort relief, de type montagne, voir l'illustration à la figure 5.25. Cette thématique a conduit, avec le soutien de l'Agence de l'Innovation de Défense, à un projet de recherche initié en 2019 et en collaboration avec V. D. Nguyen et A. Mansour, professeur en télécommunication.

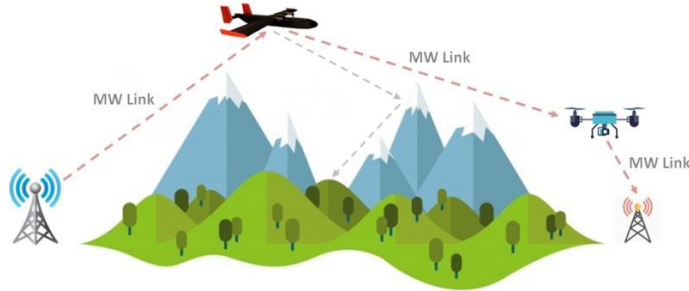


Figure 5.25 – Présentation schématique de systèmes de drones avec communication, volant en zone de montagne.

En première approximation, un système de communication (émetteur-récepteur) peut être considéré en champ libre dès lors qu'aucun élément perturbatif se trouve à l'intérieur de sa première zone de Fresnel, voir figure 5.26. Dans le cas, d'un milieu à forts reliefs, des sommets peuvent induire une atténuation de la liaison.

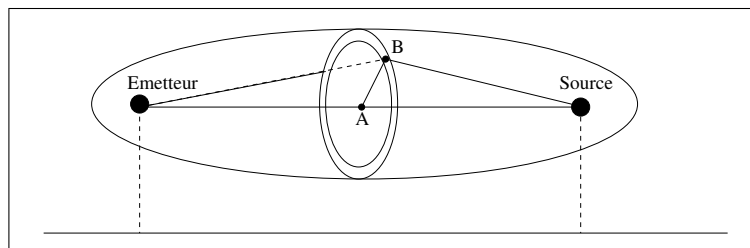


Figure 5.26 – *Ellipses de Fresnel.*

### 5.3.1 Modèles élémentaires

En utilisant les modèles exacts de diffraction (théorie de Kirchhoff) par des demi-plans, il est possible de déterminer un coefficient  $D$  de diffraction par une arête. En pratique, par exemple dans le cas mesure de dimensionnement de réseaux hertziens, on se contente souvent de formulations approchées qui limitent grandement la complexité d'utilisation.

#### Modèles simplifiés approchés

Lorsque le sommet de l'arête dépasse la ligne émetteur-récepteur, voir schéma (5.27), en plus de l'atténuation en espace libre  $A_l$  en dB se rajoute une nouvelle atténuation (en dB)  $A_a = F(v) = 6.4 + 20 \log_{10}(\sqrt{v^2 + 1} + v)$ , avec [116] :

$$v = h \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}$$

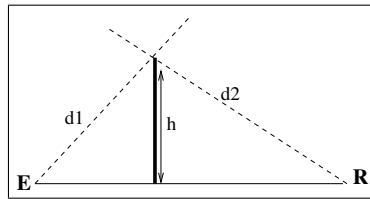


Figure 5.27 – Perturbation par une unique arête.

#### Arêtes multiples

Si deux arêtes perturbent la liaison, il existe trois méthodes pour estimer l'atténuation globale. La première consiste à remplacer les obstacles rencontrés par un obstacle unique (méthode de Millington), voir schéma (5.28).

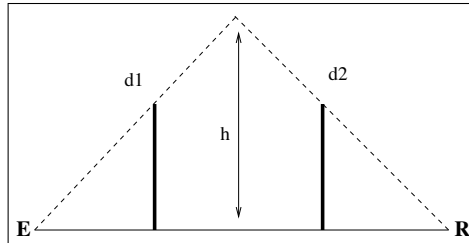


Figure 5.28 – Méthode de Millington.

La deuxième approche (méthode de Deygout) [117] considère d'abord la crête la plus masquante (hauteur la plus grande par rapport à la ligne émetteur-récepteur), et calcule une première atténuation  $A_{a1}$ . Une deuxième atténuation  $A_{a2}$  est calculée en considérant la seconde arête par rapport à l'axe allant du sommet de la première arête au récepteur ou à l'émetteur suivant le cas, voir schéma (5.29). L'atténuation globale  $A_a$  est la somme  $A_{a1} + A_{a2}$ .

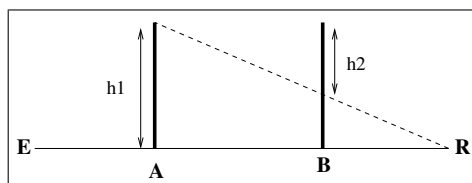


Figure 5.29 – Méthode de Deygout.

$$A_{a1} = F(v_1) \quad \text{et} \quad A_{a2} = F(v_2)$$

avec :

$$v_1 = h_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{AR} \right)} \quad \text{et} \quad v_2 = h_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{BR} \right)}$$

Enfin, la méthode d'Epstein et Peterson [118] calcule pour chaque crête l'atténuation crête à crête, voir schéma (5.30).

$$A_{a1} = F(v_1) \quad \text{et} \quad A_{a2} = F(v_2)$$

avec :

$$v_1 = h_1 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{AB} \right)} \quad \text{et} \quad v_2 = h_2 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{BR} \right)}$$

L'atténuation globale est la somme de ces deux atténuations  $A_a = A_{a1} + A_{a2}$ .

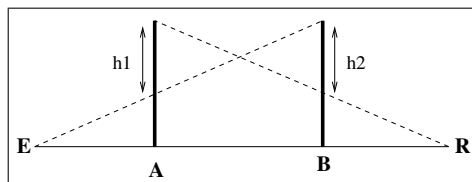


Figure 5.30 – Méthode d'Epstein et Peterson.

### 5.3.2 Modèle de Vogler

Les méthodes précédentes peuvent convenir dans une approche d'approximation grossière. Néanmoins, si l'on veut une estimation plus fiable de l'atténuation ou, comme dans le cas d'un milieu montagneux, il faut considérer une chaîne de sommets consécutifs (voir figure 5.31) plutôt des sommets isolés, il faut envisager des approches plus sophistiquées. Une modèle analytique de la diffraction qui répond au problème est celui de Vogler [119-121].

Dans ce modèle, on considère une géométrie avec un nombre  $N$  quelconque de sommets, voir figure Fig. 5.31, où  $h_0$  et  $h_{N+1}$  expriment respectivement les hauteurs de l'émetteur et du récepteur,  $\{h_n\}_{n=1}^N$  sont les hauteurs des arrêtes à partir d'une surface de référence,  $\{\phi_n\}_{n=1}^N$  sont les angles de diffraction et  $\{r_n\}_{n=1}^{N+1}$  sont les  $N+1$  distances de séparation entre les sommets. L. E.



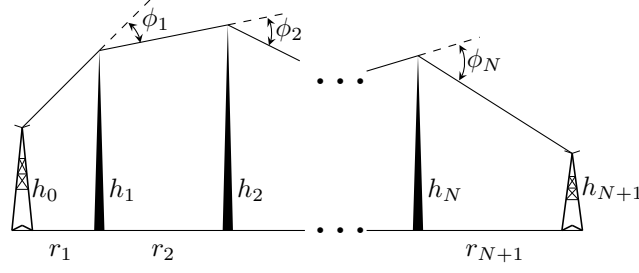


Figure 5.31 – Géométrie d'arêtes multiples consécutives (multiple knife-edge - MKE).

Vogler a montré que l'atténuation liée à la diffraction,  $A_N$ , pour l'ensemble des  $N$  sommets, prenait la forme suivante [120] :

$$A_N = \frac{1}{2^N} C_N \exp(\sigma_N) \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^N \underbrace{\int_{\beta_1}^{\infty} \cdots \int_{\beta_N}^{\infty}}_{\text{Dimension-N}} \exp(2f) \exp\left(-\sum_{n=1}^N u_n^2\right) du_1 \cdots du_N \quad (5.74)$$

avec :

$$f = \begin{cases} 0 & \text{pour } N = 1 \\ \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j & \text{pour } N \geq 2 \end{cases} \quad (5.75)$$

$$\gamma_j = \alpha_j (u_j - \beta_j) (u_{j+1} - \beta_{j+1}) \quad (5.76)$$

$$\alpha_j = \left[ \frac{r_j r_{j+1}}{(r_j + r_{j+1})(r_{j+1} + r_{j+2})} \right]^{1/2}, \text{ où } 1 \leq j \leq N-1 \quad (5.77)$$

$$\beta_j = \phi_j \left[ \frac{ik r_j r_{j+1}}{2(r_j + r_{j+1})} \right]^{1/2}, \text{ où } 1 \leq j \leq N \quad (5.78)$$

$$\sigma_N = \sum_{n=1}^N \beta_n^2 \quad (5.79)$$

$$C_N = \begin{cases} 1 & \text{pour } N = 1 \\ \left[ \frac{(\sum_{n=1}^{N+1} r_n) \prod_{n=1}^N r_n}{\prod_{n=1}^N (r_n + r_{n+1})} \right]^{1/2} & \text{pour } N \geq 2 \end{cases} \quad (5.80)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  est le module du vecteur d'onde, le nombre d'onde.

Pour calculer (5.74), l'idée maîtresse dans [120] est, au lieu de calculer une intégration sur un sous-espace de dimension  $N$ , de convertir cette tâche de calcul en  $N$  intégrations simples. Pour cela, L. E. Vogler a proposé de développer  $\exp(2f)$  en une série entière telle que :

$$\exp(2f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2f)^m}{m!} \quad (5.81)$$

En appliquant ce formalisme, on obtient que :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} (u - \beta)^m \exp(-u^2) du = m! I(m, \beta) \quad (5.82)$$

où les  $I(m, \beta)$  correspondent à ce que l'on appelle les intégrales répétées de la fonction erreur complémentaire[122] :

$$I(m, \beta) = i^m \operatorname{erfc}(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} i^{m-1} \operatorname{erfc}(t) dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{\beta}^{\infty} \frac{(t-z)^m}{m!} e^{-t^2} dt, \quad (5.83)$$

ce qui conduit à une forme-fermée pour  $A_N$ . Le détail des calculs peut se retrouver dans [119]. Les résultats obtenus peuvent se résumer sous la forme d'un théorème :

**Théorème 5.1** *Pour  $N = 1$ , l'équation (5.74) se réduit à la forme classique de la diffraction par un sommet unique :*

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(\beta_1^2) \int_{\beta_1}^{\infty} \exp(-u^2) du. \quad (5.84)$$

Pour  $N = 2$ , nous obtenons une solution sous une forme-fermée de  $A_2$  telle que :

$$A_2 = \frac{1}{2^2} C_2 \exp(\sigma_2) \sum_{m=0}^{\infty} I_m \quad (5.85)$$

où

$$I_m = 2^m \alpha_1^m m! I(m, \beta_1) I(m, \beta_2). \quad (5.86)$$

Pour  $N > 2$ , la solution générale de  $A_N$  est donnée par :

$$A_N = \frac{1}{2^N} C_N \exp(\sigma_N) \sum_{m=0}^{\infty} I_m \quad (5.87)$$

où

$$I_m = 2^m \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_{N-2}}^{m_{N-3}} \prod_{i=1}^N \frac{(m_{i-1} - m_{i+1})!}{(m_i - m_{i+1})!} \alpha_i^{m_{i-1} - m_i} I(n_i, \beta_i) \quad (5.88)$$

avec, en utilisant la notation  $m_0 = m$ ,

$$n_i = \begin{cases} m_0 - m_1 & i = 1 \\ m_{i-2} - m_i & 2 \leq i \leq N-1 \\ m_{N-2} - m_{N-1} & i = N \end{cases} \quad (5.89)$$

L'approche de L. E. Vogler découlant du formalisme analytique de la théorie de la diffraction fournit d'excellents résultats numériques. Cependant, cette méthode, comme le souligne de nombreuses références dans la littérature scientifique [123-125], s'avère d'une grande complexité de mise en œuvre et nécessite des temps de calculs souvent prohibitifs pour un nombre significatif de sommets. Dans le cadre de la simulation des communications de drones en milieu montagneux, ces coûts de calcul se transforment clairement en un verrou scientifique.

### 5.3.3 Accélération de l'algorithme, première voie

Une voie qui me semblait naturelle, pour accélérer le processus était de chercher à traiter l'algorithme de L. E. Vogler de façon récursive. Cela devait permettre de conserver la précision de l'algorithme de Vogler, tout en gagnant du temps de calcul. Ce travail de recherche a permis d'établir un premier lemme.

**Lemme 5.1** *Supposons  $f$  est de la forme (5.75) pour  $N > 1$*

$$f = \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i, \quad (5.90)$$

Avec  $N \geq 3$ , nous pouvons alors représenter  $f^m$  sous la forme :

$$f^m = \underbrace{\sum_{m_1=0}^m \binom{m}{m_1} \gamma_1^{m-m_1} \left( \underbrace{\sum_{m_2=0}^{m_1} \binom{m_1}{m_2} \gamma_2^{m_1-m_2} \left( \underbrace{\sum_{m_{N-2}=0}^{m_{N-3}} \binom{m_{N-3}}{m_{N-2}} \gamma_{N-2}^{m_{N-3}-m_{N-2}} \gamma_{N-1}^{m_{N-2}} \right)}_{1^{st} \text{ terme}} \right)}_{(N-3)^{ième} \text{ terme}} \right)}_{(N-2)^{ième} \text{ terme}} \quad (5.91)$$

ou encore

$$f^m = m! \sum_{m_1=0}^m \sum_{m_2=0}^{m_1} \cdots \sum_{m_{N-2}=0}^{m_{N-3}} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{\gamma_i^{m_{i-1}-m_i}}{(m_{i-1}-m_i)!} \quad (5.92)$$

avec  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  indiquant le coefficient binomial.

En substituant (5.92) et (5.81) dans l'expression générale (5.74), nous avons fini par obtenir le théorème suivant.

**Théorème 5.2** *(Calcul récursif de  $I_m$  [120]) : Posons*

$$C(N-1, m_{N-2}, m_{N-3}) = (m_{N-3})! \alpha_{N-1}^{m_{N-2}} I(m_{N-3}, \beta_{N-1}) I(m_{N-2}, \beta_N). \quad (5.93)$$

Alors, en utilisant les notations :

$$\begin{aligned} i &= m_{N-L}, j = m_{N-L-1}, k = m_{N-L-2} \\ 2 &\leq L \leq N-2, N \geq 4 \end{aligned}$$

et la relation de récursivité

$$C(N-L, j, k) = \sum_{i=0}^j \frac{(k-i)!}{(j-i)!} \alpha_{N-L}^{j-i} I(k-i, \beta_{N-L}) C(N-L+1, i, j), \quad (5.94)$$

le calcul récursif de  $I_m$  s'obtient par l'expression :

$$I_m = 2^m \sum_{m_1=0}^{m_0} \alpha_1^{m-m_1} I(m-m_1, \beta_1) C(2, m_1, m). \quad (5.95)$$

Ce lemme et ce théorème nous ont permis de construire une version récursive de l'algorithme de Vogler. Les démonstrations, les calculs de complexité, ainsi que le traitement théorique explicite des cas  $N = 3$  et  $N = 4$  se trouvent en [126-128]. En réalité, les résultats vont plus loin dans la mesure où il a été considéré le cas plus complexe des arêtes reliées entre elles, voir figure 5.32

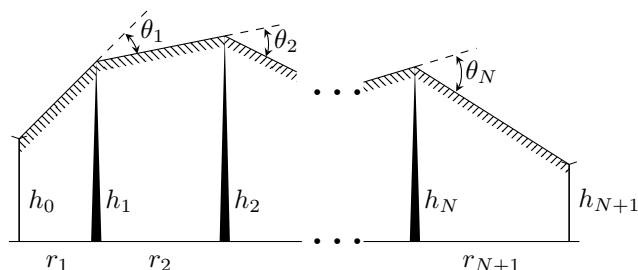


Figure 5.32 – Géométrie d'arêtes multiples reliées entre elles (multiple bridged knife-edge - MBKE).

A titre d'illustration, on peut voir, à la figure 5.33, une comparaison réalisée pour  $N = 5$  en faisant varier la hauteur des arêtes 2 et 4, à une fréquence de 100 MHz, les calculs numériques étant faits sur un PC de bureau standard. On peut constater que l'introduction de la récursivité n'introduit aucune perte de précision et en revanche permet une économie substantielle de temps.

### 5.3.4 Accélération de l'algorithme, voie plus radicale

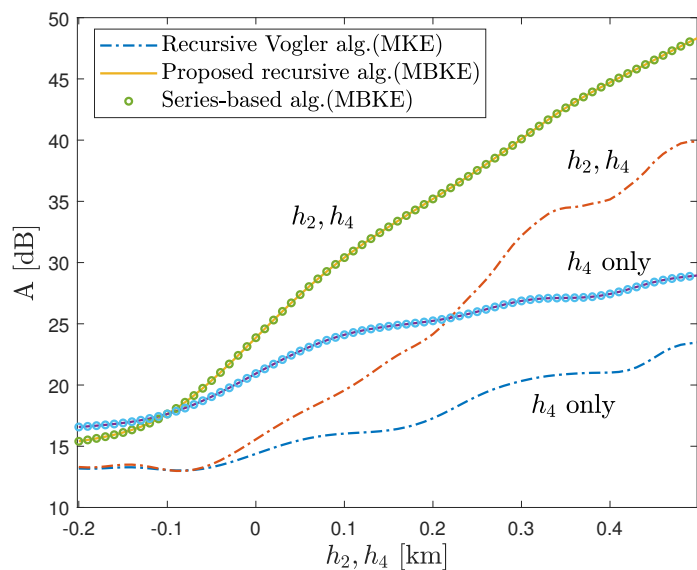
Pour être encore plus efficace en temps de calcul, V. D. Nguyen a pris l'initiative dans ce projet de proposer une voie qui me semblait moins naturelle mais qui s'est pourtant avérée être d'une redoutable efficacité.

L'idée était d'introduire l'apprentissage profond d'un réseau de neurone pour "apprendre" la simulation de Vogler et générer ainsi une boîte noire, appelée "VoglerNet", capable de reproduire les performances de cette simulation analytique, certes au prix d'une certaine perte de précision, mais avec une chute drastique du temps de calcul devenu résiduel une fois l'apprentissage réalisé [129].

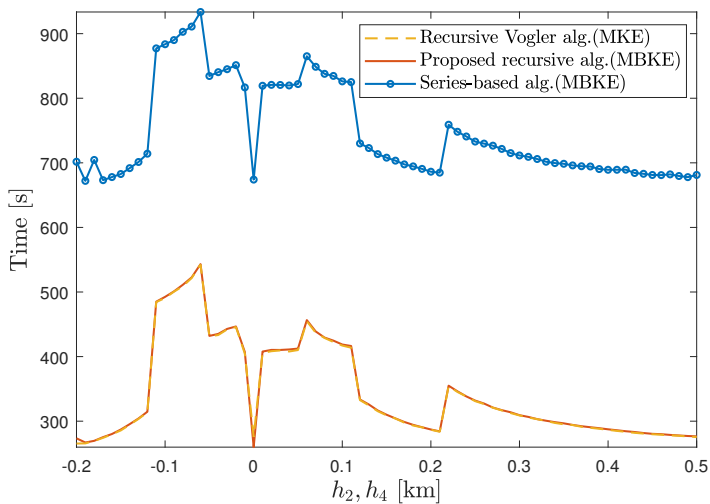
Les résultats numériques, voir figure 5.35, montrent que l'approche VoglerNet reste très proche de la solution analytique de Vogler.

### 5.3.5 Pour aller plus loin

La confrontation entre les algorithmes de types analytiques et les approches neuronales ont permis de réfléchir à des synergies possibles. En particulier, serait-il possible d'introduire des modèles physiques dans le processus d'apprentissage, voir par exemple la figure 5.36. Des développements sont en cours sur le sujet et des publications sont en phase de finalisation.

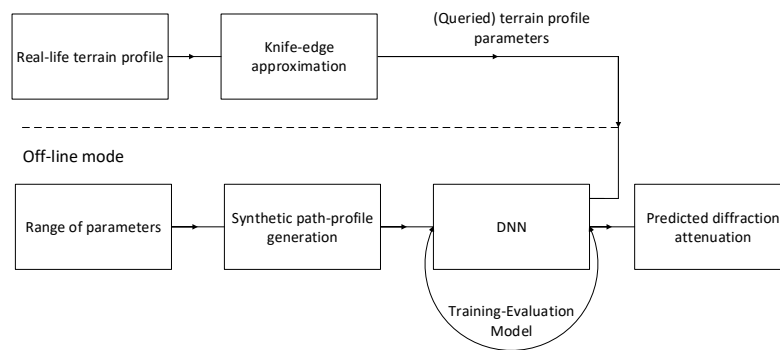


(a) Valeur de l'atténuation

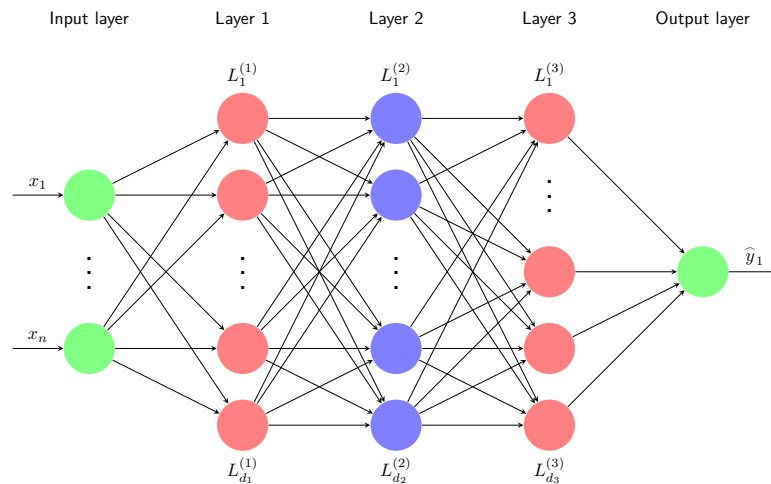


(b) Temps d'exécution

Figure 5.33 – Comparaison entre les algorithmes classiques de Vogler (series-based) et la version récursive pour des arêtes reliées (MBKE) ou non-reliées (MKE), avec  $N = 5$  et  $h_1 = h_3 = h_5 = 100$  m et une fréquence de 100 MHz, extraite de [126].



(a) Schéma d'apprentissage



(b) Structure du réseau

Figure 5.34 – Structure schématique du réseau d'apprentissage VogletNet, extraite de [129].

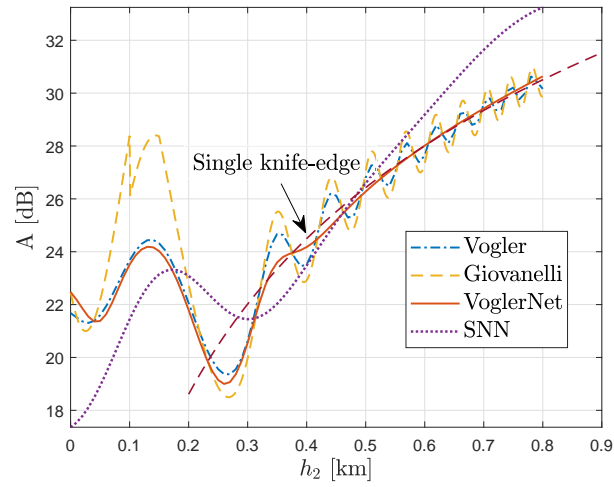


Figure 5.35 – Comparaison de la méthode VoglerNet avec Vogler classique et une autre méthode connue Giovanelli[130] et Shallow Neural Network (SNN) .

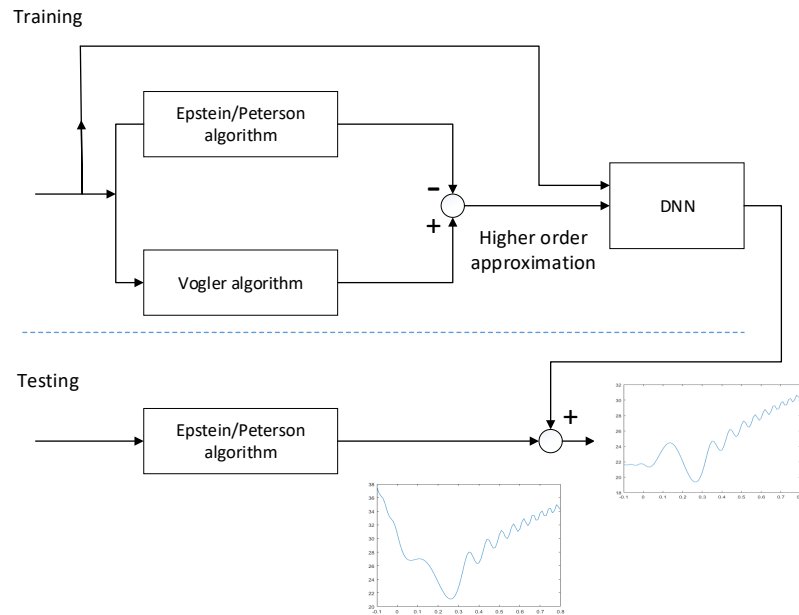


Figure 5.36 – Schéma d'apprentissage incluant les modèles physiques de Vogler et de Epstein/Peterson.

## 5.4 Conclusion

Si les deux chapitres précédents décrivent des périodes professionnelles qui se sont avérées très formatrices intellectuellement et scientifiquement, mon arrivée à l'ENSTA Bretagne a réellement été le début d'une activité de recherche beaucoup plus pérenne portant sur la problématique générale de la télédétection.

Lors d'une courte première période, même si les résultats expérimentaux n'ont pas été très probants, le travail théorique sur la modélisation des ondes GPR dans le sol et le traitement du problème d'inversion a déjà constitué une plongée significative dans la recherche en télédétection des milieux naturels.

Ensuite, la collaboration avec Ali Khenchaf, durant de nombreuses années, m'a permis d'une part d'approfondir mes connaissances théoriques sur la modélisation de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses en utilisant les approches asymptotiques, et d'autre part de réaliser le travail d'encadrement de plusieurs thèses dans le domaine de la télédétection des milieux maritimes. Cela m'a conduit à atteindre un certain niveau d'expertise sur cette thématique, à m'impliquer de plus en plus fortement dans les travaux des doctorants et à devenir moteur dans les propositions de nouveaux axes de recherche.

Depuis, le domaine de la télédétection et de la modélisation de l'interaction des ondes électromagnétiques avec l'environnement constitue toujours l'axe principal de mon activité de recherche, comme le montre la dernière partie de ce chapitre, correspondant à des activités de recherche extrêmement récentes, sur la modélisation des communications perturbées par les forts reliefs. Cette dernière partie prouve d'ailleurs que, dans le domaine de la modélisation, il est possible d'établir des ponts avec d'autres approches novatrices, comme l'IA et l'apprentissage profond.

## Références

1. Persico, R. *Introduction to ground penetrating radar : inverse scattering and data processing* (Wiley, 2014).
2. *Ground Penetrating Radar : Theory and Applications* (éd. Jol, H.) (Elsevier Science, 2009).
3. Conyers, L. B. *Ground-penetrating Radar and Magnetometry for Buried Landscape Analysis* (Springer, 2018).
4. Utsi, E. C. *Ground Penetrating Radar* (Elsevier, 2017).
5. Daniels, D. J. *Ground-penetrating radar* (The Institution of Electrical Engineers, 2004).
6. Coatanhay, A. *Optimal GPR signal deconvolution using an adaptive conjugate gradient method* in *IGARSS02* (2002).
7. Coatanhay, A. & Szkolnik, J.-J. *Interface identification using GPR signal : A monte carlo markov chain approach* in *RADAR* (2002).
8. Ramm, A. & Shcheprov, A. Theory of Ground-Penetrating Radars. *Jour. of Inverse and Ill-posed Probl.* **5**, 377-384 (1997).
9. Ramm, A. Theory of Ground-Penetrating Radars II. *Jour. of Inverse and Ill-posed Probl.* **6**, 619-624 (1998).
10. Ramm, A. Theory of Ground-Penetrating Radars III. *Jour. of Inverse and Ill-posed Probl.* **8**, 23-30 (2000).



11. Coatanhay, A. *Regularization of Laplace transform inversion for subsurface conductivity and permittivity profile estimation using GPR signals* in *IGARSS* (Toulouse, France, juil. 2003).
12. Parrilla, D. V. *Ground penetrating radar for road monitoring and damage detection : The Layer-Stripping Algorithm* mémoire de master (Università degli studi Roma Tre, 2006).
13. Sinha, S. Scattering from fractal structures. *Physica D* **38**, 310-314 (1989).
14. Mendoza-Suárez, A. & Méndez, E. R. Light scattering by a reentrant fractal surface. *Applied Optics* **36**, 3521-3531 (1997).
15. Guérin, C.-A. *Diffusion sur les mesures fractales* thèse de troisième cycle (Université Aix-Marseille 1, 1998).
16. Franceschetti, G. & Riccio, D. *Scattering, Natural Surfaces and Fractals* (Elsevier, 2007).
17. Berizzi, F. & Dalle-Mese, E. Scattering From a 2-D Sea Fractal Surface : Fractal Analysis of the Scattered Signal. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **50**, 912-925 (2002).
18. Bugert, B. *On Integral Equation Methods for Electromagnetic Scattering by Biperiodic Structures* thèse de troisième cycle (Technischen Universität Berlin, 2014).
19. Maystre, D. *Plasmonics* 39-83 (Springer, 2012).
20. Olgilvy, J. A. *Theory of Wave Scattering from Random Rough surface* (Adam Hilger, 1991).
21. Awada, A. *Diffusion bistatique des ondes électromagnétiques par les surfaces rugueuses en utilisant l'approximation SSA : Application à la surface maritime* thèse de troisième cycle (Université de Bretagne Occidentale, 2007).
22. Rellich, F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **53**, 57-65 (1943).
23. Odeh, F. M. Uniqueness Theorems for the Helmholtz Equation in Domains With Infinite Boundaries. *Journal of Mathematics and Mechanics* **12**, 857-867 (1963).
24. Willers, A. The Helmholtz equation in disturbed half-spaces. *Math. Meth. Appl. Sci.* **9**, 312-323 (1987).
25. Vinnik, A. A. & Èidus, D. M. On radiation conditions for domains with infinite boundaries. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **214**, 19-21 (1974).
26. Vogelsang, V. Das Ausstrahlungsproblem für elliptische Differentialgleichungen in Gebieten mit Unbeschränktem Rand. *Math. Z.* **144**, 101-124 (1975).
27. Minskii, V. Sommerfeld radiation condition for second-order differential operator in a domain with infinite border. *Journal of Differential Equations* **48**, 157-176 (1983).
28. Chandler-Wilde, S. N. & Elschner, J. Variational approach in weighted Sobolev spaces to scattering by unbounded rough surfaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis (SIMA)* **42**, 2554-2580 (2010).
29. Kirchhoff, G. *Vorlesungen über mathematische* (Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1891).
30. Rayleigh, J. W. S. *The Theory of Sound* (London : Macmillan, 1894).
31. Rice, S. O. Reflections of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.* **4**, 351-378 (1951).

32. Eckart, C. The scattering of sound from the sea surface. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 566-570 (1953).
33. Bass, F. G., Fuks, I. M., Kalmykov, A. I., Ostrovsky, I. E. & Rosenberg, A. D. Very high frequency Radiowave scattering by a Disturbed sea surface Part I : Scattering from a slightly disturbed boundary. *IEEE trans. Antennas Propag.* **AP-16**, 554-559 (1968).
34. Bass, F. G., Fuks, I. M., Kalmykov, A. I., Ostrovsky, I. E. & Rosenberg, A. D. Very high frequency Radiowave scattering by a Disturbed sea surface Part II : Scattering from an actual sea surface. *IEEE trans. Antennas Propag.* **AP-16**, 560-568 (1968).
35. Khenchaf, A. *Modélisation électromagnétique Radar bistatique et traitement de l'information*. HDR Ecole polytechnique de l'université de Nantes. 2000.
36. Elfouhaily, T., Thompson, D. R., Freund, D. E., Vandemark, D. & Chapron, B. A new bistatic model for electromagnetic scattering from perfectly conducting random surfaces : numerical evaluation and comparison with SPM. *Waves in Random Media* **11**, 33-43 (2001).
37. Voronovich, A. V. Small Slope Approximation in wave scattering from rough surfaces. *Sov. Phys. JETP* **62**, 65-70 (1985).
38. Voronovich, A. V. Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces. *Waves Random Media* **4**, 337-367 (1994).
39. Elfouhaily, T., Guignard, S., Awadallah, R. & Thompson, D. R. Local and non-local curvature approximation : a new asymptotic theory for wave scattering. *Waves Random Media* **13**, 321-328 (2003).
40. Guérin, C.-A., Soriano, G. & Elfouhaily, T. Weighted curvature approximation : numerical tests for 2D dielectric surfaces. *Waves in Random Media* **14**, 349-363 (2004).
41. Mouche, A. A., Chapron, B. & Reul, N. A simplified asymptotic theory for ocean surface electromagnetic wave scattering. *Waves in Random and Complex Media* **17**, 321-341 (2007).
42. Mouche, A. A., c, B. C., Reul, N. & Collard, F. Predicted Doppler shifts induced by ocean surface wave displacements using asymptotic electromagnetic wave scattering theories. *Waves in Random and Complex Media* (2008).
43. Tian, J., Tong, J., Shi, J. & Gui, L. A new approximate fast method of computing the scattering from multilayer rough surfaces based on the Kirchhoff approximation. *Radio Sci.* **52** (2017).
44. Beckmann, P. & Spizzichino, A. *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces* (Oxford : Pergamon, 1963).
45. Ishimaru, A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media* Réédition de la version de 1978 (IEEE Press, 1997).
46. Bass, F. G. & Fuks, I. M. *Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces* (New York : Pergamon, 1979).
47. Ulaby, F. T., Moore, R. K. & Fung, A. K. *Microwave Remote Sensing : Active and Passive* (Dedham, MA : Artech House, 1982).
48. Tsang, L., Kong, J. A. & Shin, R. *Theory of Microwave Remote Sensing* (New York : Wiley-Interscience, 1985).

49. Rytov, S. M., Kravtsov, Y. A. & Tatarskii, V. I. *Principles of Statistical Radiophysics* (Berlin : Springer, 1987).
50. Voronovich, A. G. *Wave scattering from rough surface* 2ème édition (Springer, 1999).
51. Tsang, L., Kong, J. A. & Ding, K. H. *Scattering of Electromagnetic Waves (vol. I, II et III)* (New York : Wiley-Interscience, 2000).
52. Pinel, N. & Bourlier, C. *Electromagnetic Wave Scattering from Random Rough Surfaces* (Wiley, 2013).
53. Che, K.-S. *Radar Scattering and Imaging of Rough Surfaces* (CRC Press, 2021).
54. Elfouhaily, T. & Guérin, C. A. A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces. *Waves Random Media* **14**, R1-R40 (2004).
55. Knott, E. F., Shaeffer, J. F. & Tuley, M. T. *Radar Cross Section* 2ème édition (Artech House, 1993).
56. Mitzner, K. M. Effect of small irregularities on electromagnetic scattering from an interface of arbitrary shape. *J. Math. Phys.* **5**, 1776-1786 (1964).
57. Johnson, J. T. Third-order small-perturbation method for scattering from dielectric rough surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 2720-2736 (nov. 1999).
58. Demir, M. A. & Johnson, J. T. Fourth- and higher-order small-perturbation solution for scattering from dielectric rough surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 2330-2337 (déc. 2003).
59. Dieudonné, J. *Calcul infinitésimal* (Hermann Paris, 1980).
60. Chabat, B. *Introduction à l'analyse complexe* (Editions Mir, 1990).
61. Sancer, M. Shadow-corrected electromagnetic scattering from a randomly rough surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **17**, 577-585 (1969).
62. Valenzuela, G. R. theories for the interaction of electromagnetic waves and oceanic waves : a review. *Bound. Layer Met.* **13**, 61-85 (1978).
63. Chan, H. & Fung, A. K. A theory of sea scatter at large incident angle. *Journal of Geophysical Research* **82**, 3439-3444 (1977).
64. Khenchaf, A. & Airiau, O. Bistatic radar moving returns from sea surface. *IEICE trans. Elect.* **E83-C**, 1827-1835 (2000).
65. Khenchaf, A. Bistatic scattering and depolarization by randomly rough surfaces : application to the natural rough surfaces in X-band. *Waves Random Media* **11**, 61-89 (2001).
66. Shen, J. & Maradudin, A. A. Multiple scattering of waves from random rough surfaces. *Phys. Rev. B* **22**, 4234-4240 (9 nov. 1980).
67. Winebrenner, D. P. & Ishimaru, A. Application of the phase-perturbation technique to randomly rough surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, 2285-2294 (déc. 1985).
68. Winebrenner, D. & Ishimaru, A. Investigation of a surface field phase perturbation technique for scattering from rough surfaces. *Radio Science* **20**, 161-170 (1985).
69. Soriano, G., Guérin, C.-A. & Saillard, M. Scattering by two-dimensional rough surfaces : comparison between the method of moments, Kirchhoff and small-slope approximations. *Waves in Random Media* **12**, 63-83 (2002).
70. Kinsman, B. *Wind waves* (Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, Inc., 1965).

71. Arnold-Bos, A. *La surveillance maritime en imagerie radar bistatique : théorie, simulation, contribution à la détection automatique du sillage des navires* thèse de troisième cycle (Université de Bretagne Occidentale, 2010).
72. Cox, C. & Munk, W. Statistics of the sea surface derived from sun glitter. *J. Mar. Res.* **13**, 198-226 (1954).
73. Cox, C. & Munk, W. Slopes of the sea surface deduced from photographs of sun glitter. *Bull. Scripps. Inst. of Oceanog.* **6**, 401-488 (1956).
74. Philips, O. M. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *Journal of Fluid Mech.* **4**, 426-434 (1958).
75. Vaitilingom, L. *Diffusion bistatique des ondes EM par une surface rugueuse en HF. Application aux fouillis maritime et terrestre* thèse de troisième cycle (Université Bretagne Occidentale, 2011).
76. Pierson, W. J. & Moskowitz, L. A proposed spectral form of fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. *Journal of Geophysical Research* **69**, 5181-5190 (1964).
77. Fung, A. K. & Lee, K. K. A semi-empirical sea-spectrum model for scattering coefficient estimation. *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **7**, 166-176 (1982).
78. Elfouhaily, T., Chapron, B., Katsaros, K. & Vandemark, D. A Unified Directional Spectrum for Long and Short Wind-Driven Waves. *J. Geophys. Res.* **102**, 15781-15796 (1997).
79. Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D. E., Enke, K., Edwing, J. A., Gienapp, H., Hasselmann, D. E., Kruseman, P., Meerburg, A., and D. J. Olbers, P. M., Richter, K., Sell, W. & Walden, H. Measurements of wind-wave growth and swell during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Deutsche Hydrographische Zeitung* **8**, 1-95 (1973).
80. Debye, P. J. W. *Polar Molecules* (Dover Publications, 1929).
81. Cole, K. S. & Cole, R. H. Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics. *Journal of chemical physics* **9**, 341-351 (1941).
82. Cole, K. S. & Cole, R. H. Dispersion and absorption in dielectrics II. Direct current characteristics. *Journal of chemical physics* **10**, 98-105 (1942).
83. Sajjad, N. *Electromagnetic wave scattering by using an improved two-scale model : Application to sea and bare soil surface* thèse de troisième cycle (Université de Bretagne Occidentale, 2011).
84. Ayari, M. Y. *Détection électromagnétique d'éléments polluants au dessus de la surface maritime* thèse de troisième cycle (Université de Bretagne Occidentale, 2006).
85. Wentz, F. J., Petrich, S. & Thomas, L. A. A model function for ocean radar cross section at 14.6 GHz. *J. Geophys. Res.* **89**, 3689-3704 (1984).
86. Jones, W. L., Schroeder, L. C. & Mitchell, J. L. Aircraft measurements of the microwave scattering signature of the ocean. *IEEE trans. Antennas Propag.* **AP-25**, 52-61 (1977).
87. Awada, A., Khenchaf, A., Coatanhay, A. & Ayari, Y. *Comparison between small slope approximation and two scale model in bistatic configuration in IGARSS05* (2005).

88. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Small slope approximation and two scale model in bistatic configuration, application to the sea surface in European Conference on Propagation and Systems* (2005).
89. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Bistatic Radar scattering from an ocean surface at L-Band in RADAR 2006* (2006).
90. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Polarimetric bistatic radar scattering behavior of the ocean surface in OCEANS* (Singapore, mai 2006).
91. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Contribution to Sea Scattering estimation for various Wind Direction in IGARSS06* (2006).
92. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Frequency impact on the bistatic radar scattering from an ocean surface in IGARSS07* (2007).
93. Awada, A., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Correlation between the NRCS and the wind speed over sea in both monostatic and bistatic configurations in IGARSS* (Boston, USA, 06-11 July 2008).
94. Awada, A., Ayari, M., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Bistatic scattering from an anisotropic sea surface : Numerical comparison between the first-order SSA and the TSM models.* **16**, 383-394 (2006).
95. Sajjad, N., Khenchaf, A., Coatanhay, A. & Awada, A. *An improved two-scale model for the ocean surface bistatic scattering in IGARSS* (Boston, USA, 06-11 July 2008).
96. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Electromagnetic Wave Scattering From Sea and Bare Soil Surfaces Based On An Improved Two-Scale Model in Radar* (Bordeaux, France, 12-16 October 2009).
97. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Electromagnetic Wave Scattering From Sea and Bare Soil Surfaces Based On An Improved Two-Scale Model in Radar* (Bordeaux, France, 12-16 October 2009).
98. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Electromagnetic wave from ocean surface at low grazing angles in IGARSS* (Cape Town, South Africa, 12-17 July 2009).
99. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Depolarization of Electromagnetic Waves By Sea Surface in OCOSS, Sea Tech week* (Brest, France, 21-25 Juin 2010 2010).
100. Sajjad, N., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Depolarization of Electromagnetic Waves from Bare Soil Surfaces. Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2010. Series Mathematics in Industry* **16** (éd. Springer, ISBN 978-3-642-22453-9) 107-115 (2012).
101. Pinel, N. *Etude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles - Application à une mer recouverte de pétrole* thèse de troisième cycle (Ecole polytechnique de l'université de Nantes, 2006).
102. Mainvis, A. *Modélisation et mesure de l'interaction d'une onde électromagnétique avec une surface océanique. Application à la détection et à la caractérisation radar de films d'hydrocarbures* thèse de troisième cycle (Université de Toulouse, 2018).
103. Cini, R. & Lombardini, P. P. *Damping effect of monolayers on surface wave motion in a liquid. Journal of Colloid and Interface Science* **65**, 387-389 (juin 1978).
104. Cini, R., Lombardini, P. P. & Hühnerfuss, H. H. *Remote sensing of marine slicks utilizing their influence on wave spectra. Int. J. Remote Sensing* **4**, 101-110 (1983).

105. Cini, R., Lombardini, P. P., Manfredi, C. & Cini, E. Ripples damping due to monomolecular films. *Journal of Colloid and Interface Science* **119**, 74-80 (1987).
106. Lombardini, P. P., Piazzese, F. & Cini, R. The marangoni wave in ripples on air-water interface covered by a spreading film. *Nuovo Cimento C* **5**, 256 (1982).
107. Lombardini, P. P. *Maximum of damping ratio in rippled water covered by monomolecular films* ONRL Report on the Role of Surfactant Films on the Interface Properties of the Sea Surface (Office of naval research, London, 1986).
108. Lombardini, P. P., Fiscella, B., Trivero, P. & Cappa, C. Modulation of the Spectra of Short Gravity Waves by Sea Surface Films : Slick Detection and Characterization with a Microwave Probe. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* **6**, 882-890 (mar. 1989).
109. Lamkaouchi, K. *L'eau : étalon diélectrique. Etude de lois diélectriques appliqués à l'eau et à l'émulsion de pétrole mesurées en microwaves* thèse de troisième cycle (Univ. Bordeaux I, 1992).
110. Ayari, M. Y., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Electromagnetic Propagation in Troposphere : Inverse Problem Using Optimization Approaches in Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES* (2003).
111. Ayari, Y., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Bistatic Electromagnetic Scattering by Sea Surface Using Elfouhaily Spectrum in RADAR* (2004).
112. Ayari, M., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *The influence of ripple damping on electromagnetic bistatic scattering by sea surface in IGARSS05* (2005).
113. Ayari, M., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Marine oil-spills electromagnetic scattering model using two-scale approach in European Conference on Propagation and Systems* (2005).
114. Ayari, M., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. *Influence of the sea surface on electromagnetic propagation in a sea transport context in ITS Telecommunications* (2005).
115. Ayari, M. Y., Khenchaf, A. & Coatanhay, A. Simulations of the bistatic scattering using two-scale model and the unified sea spectrum. **1**, 1-19 (2007).
116. Bullington, K. Radio Propagation at Frequencies above 30 Megacycles. *Proceedings of the IRE* **35**, 1122-1136. issn : 2162-6634 (oct. 1947).
117. Deygout, J. Multiple knife-edge diffraction of microwaves. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **14**, 480-489. issn : 0018-926X (juil. 1966).
118. Epstein, J. & Peterson, D. W. An Experimental Study of Wave Propagation at 850 MC. *Proceedings of the IRE* **41**, 595-611. issn : 2162-6634 (mai 1953).
119. Vogler, L. E. The attenuation of electromagnetic waves by multiple knife-edge diffraction. *NASA STI/Recon Technical Report N* **82** (1981).
120. Vogler, L. E. An attenuation function for multiple knife-edge diffraction. *Radio Science* **17**, 1541-1546. issn : 1944-799X (nov. 1982).
121. Vogler, L. E. Further investigations of the multiple knife-edge attenuation function. *NASA STI/Recon Technical Report N* **84** (1983).
122. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table* (National Bureau of Standards Applied Mathematics series 55, 1965).

123. Beyer, J. An approximate approach to predict multiple screen diffraction in the case of grazing incidence. *Radio Science* **39**, 1-6. issn : 1944-799X (août 2004).
124. Saunders, S. R. & Aragón-Zavala, A. *Antennas and propagation for wireless communication systems* (John Wiley & Sons, 2007).
125. DeMinco, N. & McKenna, P. *A comparative analysis of multiple knife-edge diffraction methods in Proc. ISART/ClimDiff* (2008), 65-69.
126. Nguyen, V.-D., Mansour, A., Coatanhay, A. & Marsault, T. *A Fast Recursive Algorithm for Multiple Bridged Knife-Edge Diffraction in 2021 29th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)* (2021), 1651-1655. doi :[10.23919/EUSIPCO54536.2021.9615940](https://doi.org/10.23919/EUSIPCO54536.2021.9615940).
127. Nguyen, V.-D., Phan, H., Mansour, A., Coatanhay, A. & Marsault, T. On the Proof of Recursive Vogler Algorithm for Multiple Knife-Edge Diffraction. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **69**, 3617-3622 (2021).
128. Nguyen, V.-D., Phan, H., Mansour, A., Coatanhay, A. & Marsault, T. *A generalized recursive Vogler algorithm for multiple bridged knife-edge diffraction* (Accepté pour publication dans la revue IEEE Transactions on Antennas and Propagation). 2022.
129. Nguyen, V.-D., Phan, H., Mansour, A. & Coatanhay, A. *VoglerNet : multiple knife-edge diffraction using deep neural network in 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)* (2020), 1-5. doi :[10.23919/EuCAP48036.2020.9135548](https://doi.org/10.23919/EuCAP48036.2020.9135548).
130. Giovaneli, C. L. An analysis of simplified solutions for multiple knife-edge diffraction. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **32**, 297-301. issn : 0018-926X (mar. 1984).

# Ondes et surfaces de mer : mouvements déterministes

---

Au cours de ce chapitre, j’aborde une problématique de la diffusion par des surfaces de mer qui marque une rupture par rapport au chapitre précédent. En effet, cette partie s’intéresse explicitement à l’évolution dans le temps du champ électromagnétique diffusé par une surface de mer, ce qui ne peut pas, par construction, être traité en appliquant les approches précédentes.

On commence par introduire le sujet avec une naïveté assumée afin de mettre en évidence certains points d’intérêt dans la thématique. Ce nouveau point de vue nécessite aussi implicitement de passer d’une télédétection électromagnétique active à une télédétection passive, notamment en utilisant les signaux GNSS comme sources d’opportunité.

Puisque la déformation temporelle de la surface des vagues constitue le point clé de ce chapitre, il faut introduire les éléments de mécanique des fluides qui permettent d’obtenir des profils de vagues et aussi les techniques numériques qui estiment le champ électromagnétique diffusé par un profil de vague donné. En particulier, on expose le travail d’une thèse que j’ai encadré et qui était dirigée par Ali Khenchaf, sur l’intérêt des méthodes des moments d’ordres supérieurs dans ce contexte. Un travail plus personnel sur une approche de modélisation numérique multi-échelle est aussi présenté. Enfin, quelques résultats de modélisation et de simulation sont livrés.

6.1	<i>E pur si muove!</i> . . . . .	160
6.2	Une thématique académique intéressante? . . . . .	160
6.3	Une application opérationnelle : les systèmes GNSS . . . . .	165
6.4	Modélisation électromagnétique par des approches numériques . . . . .	166
6.4.1	Méthode des moments classique . . . . .	166
6.4.2	Méthode des moments d’ordre supérieur . . . . .	168
6.4.3	Méthode des moments adaptative multi-échelle . . . . .	171
6.5	Les vagues déferlantes . . . . .	174
6.5.1	Génération des profils de vagues déferlantes . . . . .	174
6.5.2	Simulation des champs électromagnétiques diffusés par les vagues . . . . .	178
6.5.3	Pour aller plus loin . . . . .	180
6.6	Conclusion . . . . .	180



## 6.1 *E pur si muove !*

En 1616, le département de l'Église de la censure des livres a décrété que la doctrine de la Terre en mouvement était contraire aux Écritures, et ce décret équivalait à une interdiction générale de défendre la vision copernicienne contre les objections scripturaires. En 1633, après un procès formel, l'Inquisition a condamné Galilée comme un hérétique soupçonné de défendre l'hypothèse de la Terre en mouvement autour du Soleil et de nier l'autorité astronomique des Écritures. Ces événements ont conduit à attribuer la célèbre expression italienne "E pur si muove!" qui signifie littéralement "Et pourtant elle bouge!" (souvent traduit en français par "Et pourtant elle tourne!"), au scientifique italien qui aurait marmonné cette phrase après avoir été forcé devant l'Inquisition d'abjurer sa théorie.

En se promenant sur les chemins côtiers, il serait bien tentant de prononcer la phrase de Galilée en observant la mer. Le mouvement et l'évolution dans le temps apparaît intuitivement comme une composante fondamentale des surfaces maritimes. Or, il est à noter que la théorie de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses, en prenant le point de vue des approximations asymptotiques, ne semble pas du tout adaptée, ou seulement au travers de l'effet Doppler [1], pour étudier l'influence des déformations temporelles des surfaces de mer sur le champ électromagnétique diffusé.

## 6.2 Une thématique académique intéressante ?

On peut se convaincre aisément, en laissant vagabonder son imagination et en stimulant son intuition, qu'une thématique scientifique mérite que l'on s'y attarde, pour constater ultérieurement que le sujet est beaucoup plus limité qu'on l'avait cru initialement et qu'il serait plus profitable de choisir une autre thématique scientifique plus riche. C'est dans cet état d'esprit, qu'avec A. Baussard, nous avons lancé une étude sur le sujet [2] en adoptant une vision plus qualitative et assumant au départ une certaine naïveté scientifique.

### Le plus simple possible

L'idée de départ était de réaliser quelques simulations minimalistes en considérant une surface en mouvement la plus simple possible illuminée verticalement par une onde plane monochromatique (voir figure 6.1), puis d'augmenter très progressivement la complexité de cette surface. Un observateur est placé au dessus de la surface en mouvement et enregistre le signal électromagnétique renvoyé. On cherche à analyser ce signal, par le biais d'une imagerie temps-fréquence, et à comprendre les phénomènes en présence.

La surface la plus simple à laquelle on puisse penser est une simple sinusoïde que l'on fait évoluer en lui affectant une vitesse de phase  $\omega_{sin}$  :

$$s(t, x) = A_{sin} \sin(-\omega_{sin}t + k_{sin}x). \quad (6.1)$$

A chaque instant, il est possible de calculer, par une méthode de moment décrite dans la suite, le champ électromagnétique diffusé par la surface en mouvement et d'enregistrer au point d'observation pour obtenir un signal  $y(t)$ . Ce signal est ensuite décomposé dans le plan temps-fréquence par une pseudo distribution de Wigner-Ville (Pseudo-Wigner-Ville Distribution-PWVD)  $PW_z(t, f)$  :

$$PW_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) z(t + \tau/2) z^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (6.2)$$

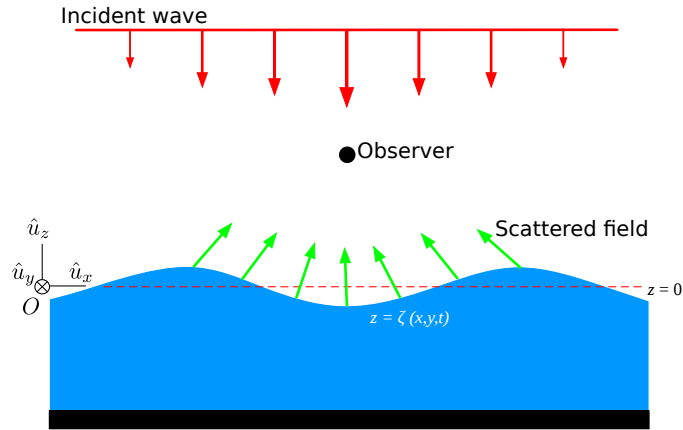


Figure 6.1 – Configuration géométrique, extrait de [2].

où  $z(t)$  est le signal analytique associé à  $y(t)$  et  $h(\tau)$  est une fenêtre de régularisation. Par ailleurs, sur cette surface, il est possible d'identifier des points de réflexion spéculaire et de calculer à chaque instant la fréquence Doppler liée à leur déplacement. En pratique, la fréquence Doppler est donnée par l'expression :

$$f_d(t) = \frac{1}{\lambda_{em}} \frac{d}{dt} (R_{ET} + R_{TR}), \quad (6.3)$$

où  $R_{ET}$  et  $R_{TR}$  sont respectivement les distances Émetteur-Cible (Emitter-Target) et Cible-Récepteur (Target-Receiver). Cette trace temps-fréquence de points spéculaires est ensuite ajoutée à l'image de la PWVD, voir figure 6.2.

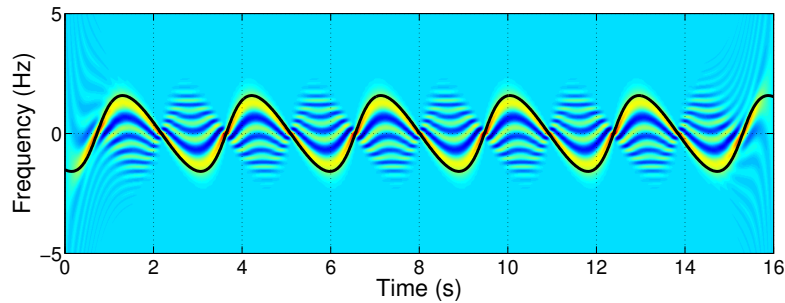


Figure 6.2 – PWVD du signal enregistré et (en noir) fréquence Doppler du point spéculaire en mouvement, extrait de [2].

Cette configuration très simple ne pose pas beaucoup de problèmes d'interprétation. Si, maintenant, on crée une surface mobile par la superposition de 3 sinusoides ayant des vitesses de phase différentes. La dynamique de la surface devient beaucoup plus complexe et il y a présence de plu-

sieurs points spéculaires. L'imagerie PWVD avec les traces temps-fréquences des points spéculaires illustre cette nouvelle complexité, voir figure 6.3.

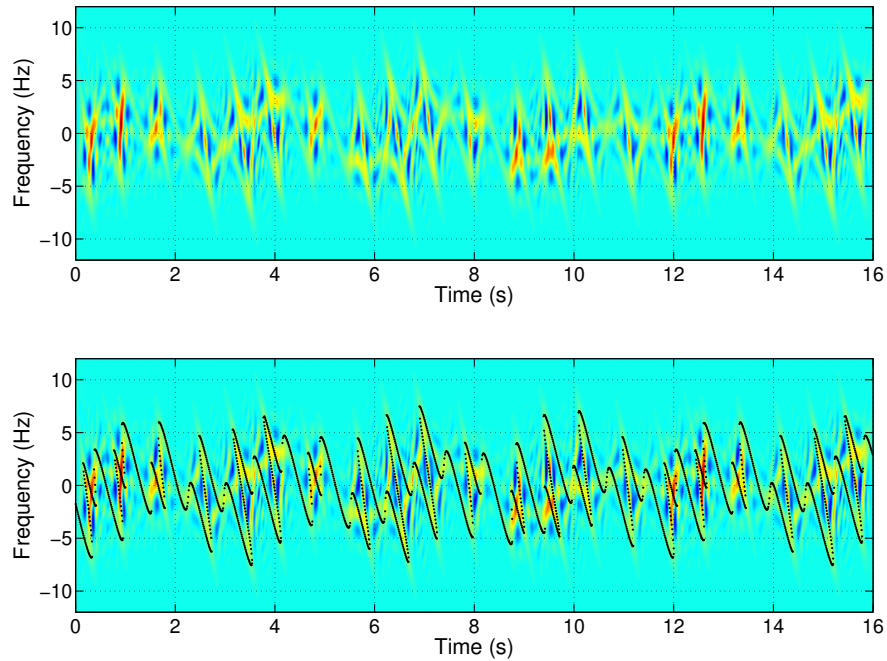


Figure 6.3 – PWVD du signal enregistré avec 3 sinusoides. Sur la figure du bas, est ajoutée (en noir) la fréquence Doppler des points spéculaires en mouvement, extrait de [2].

Sur la figure 6.4, on constate clairement la présence à un temps donné de la superposition de plusieurs points spéculaires (3 dans ce cas).

Les zooms faits sur la figure 6.4 peuvent s'expliquer par des créations spontanées et des annihilations de points spéculaires. On notera aussi des phénomènes de bifurcation dans ce système dynamique, voir figure 6.5.

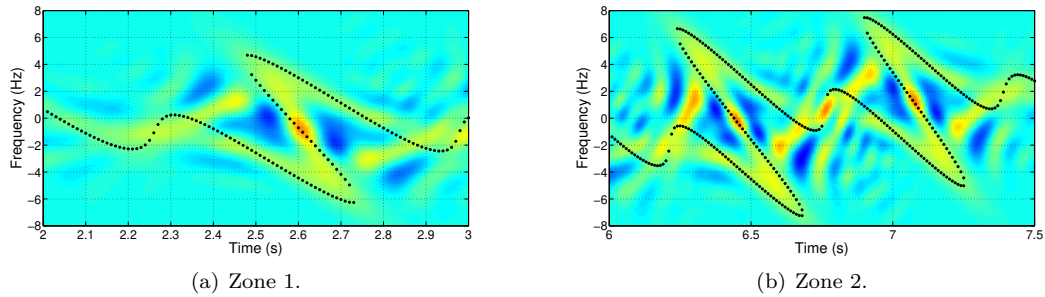


Figure 6.4 – Zoom sur des zones d'intérêt l'imagerie 6.3, extrait de [2].

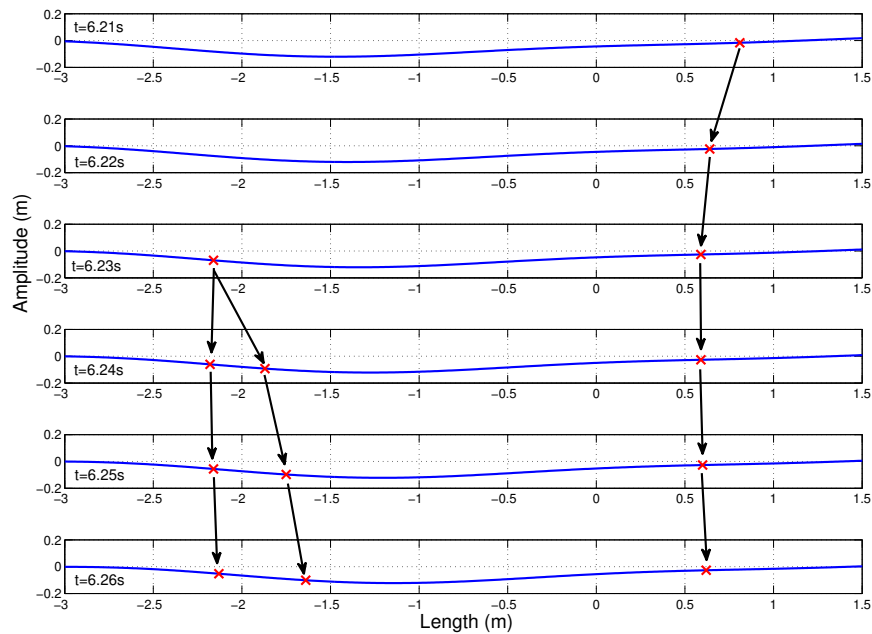


Figure 6.5 – PWVD du signal enregistré avec 3 sinusoides. Sur la figure du bas, est ajoutée (en noir) la fréquence Doppler des points spéculaires en mouvement, extrait de [2].

Enfin, on peut terminer en présentant l'imagerie PWVD pour une surface réaliste en mouvement obtenue à partir du spectre de mer d'Elfouhaily et d'une loi de dispersion pour la vitesse de phase, 6.6. Sans pouvoir complètement interpréter la complexité extrême de cette dynamique, ces résultats peuvent nous convaincre de la richesse potentielle de l'étude dynamique des signaux renvoyés par

les surfaces de mer en mouvement.

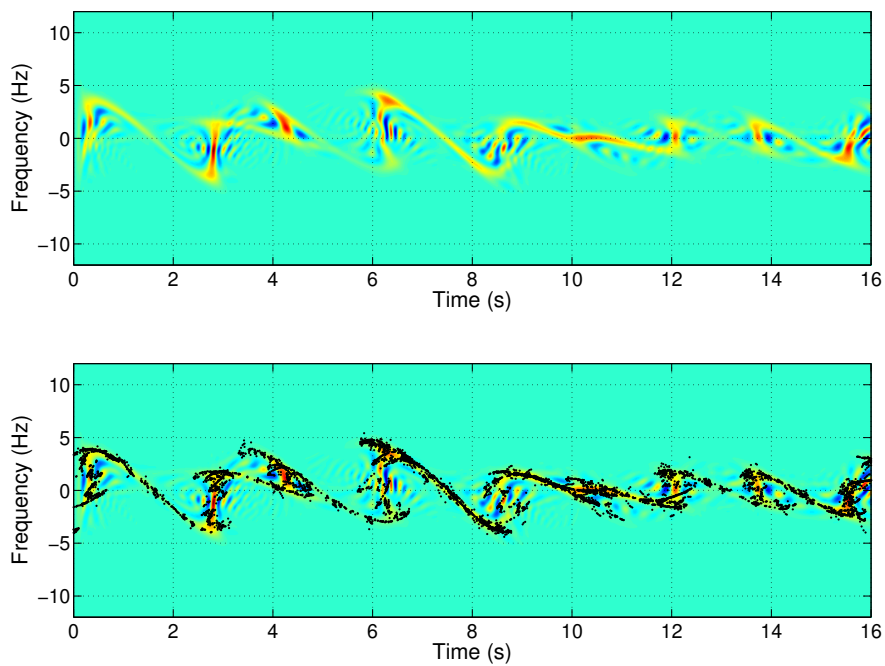


Figure 6.6 – PWVD du signal diffusé par une surface de mer réaliste, correspondant à un état de mer 3 sur l'échelle Beaufort. Sur la figure du bas, ont été ajoutées les traces temps-fréquences des points spéculaires (en noir), extrait de [2].

### 6.3 Une application opérationnelle : les systèmes GNSS

Il est une chose de se convaincre de la pertinence académique de l'étude des signaux électromagnétiques renvoyés par des surfaces de mer en mouvement. Un autre chose est de montrer que cette problématique correspond à une réalité opérationnelle. Dans les systèmes radar classique, il y a un balayage rapide de faisceaux micro-onde. Une zone de mer n'est donc souvent éclairée que durant une période de temps extrêmement courte. La déformation de la surface n'est alors pas réellement perceptible. Généralement, seule la fréquence Doppler globale, liée au déplacement moyen, est exploitée. Pour tirer toute la richesse spectrale du signal renvoyé par une mer en mouvement, il faut une émission d'une onde cohérente, idéalement un signal déterministe connu, illuminant la mer pendant de longues périodes de temps au regard de la mécanique des fluides marins. C'est dans cette optique que je me suis intéressé au signaux des systèmes de géolocalisation satellitaires (Global Navigation Satellite Systems-GNSS) dont les systèmes GPS (Global Positioning System) ou Galileo. Pris comme sources d'opportunités, ceux-ci peuvent être considérés comme des émetteurs micro-ondes (principalement en bande L) dont on connaît, du moins dans une large mesure, les caractéristiques des signaux émis et les positions en temps réel. La problématique devient alors d'étudier l'interaction de signaux émis avec les milieux d'intérêt, essentiellement constitués pour ma part d'environnements naturels comme les surfaces de mer ou les zones forestières [3-13]. J'ai ainsi été amené à participer à l'encadrement de la thèse de S. Tay [14], dirigée par R. Garelo, sur l'utilisation des signaux GNSS pour la détection de cibles en mer, voir figure 6.7. Dans la logique des travaux de J. L. Garrison [15], de A. Komjathy [16], de J.F. Marchan-Hernandez [17] et de J. K. Voo [18] sur l'utilisation des signaux GNSS pour la télédétection en milieu maritime, les travaux de S. Tay [19-22] avait pour objet d'étudier l'intérêt de certaines techniques de filtrage pour améliorer la détection de cible fixe et mobiles en mer, voir figure 6.7.

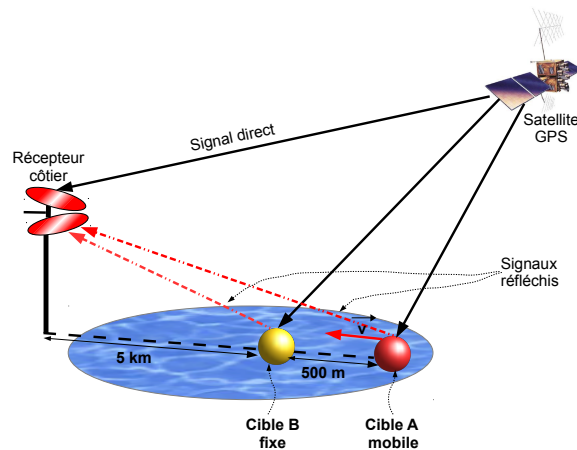


Figure 6.7 – Exemple de système de réception passive du signal GPS en environnement marin, extrait de [14].

## 6.4 Modélisation électromagnétique par des approches numériques

Dans ce contexte générale de lien entre signaux électromagnétique et surface de mer en mouvement, un point majeur va être de modéliser ce champ électromagnétique, et faute de solution analytique, par des approches numériques. Il est alors naturel de chercher la solution technique la plus efficace pour faire ce traitement parmi les méthodologies classiques (méthode de moment, différences finies, éléments finis,...). Les critères de sélection peuvent être la précision des estimations numériques obtenues, le temps de calcul, la facilité d'implémentation et bien d'autres critères auxquels on pense habituellement. Néanmoins, concernant les environnements naturels, et surtout les environnement marins, il faut, à mon sens, prendre un peu de recul. Pour un produit manufacturé, par exemple un circuit électronique, les caractéristiques sont, à une grande précision près, parfaitement reproductibles. Il est alors parfaitement légitime de choisir un logiciel de calcul numérique, de type boîte noire, fournissant un résultat rapidement et dont la précision sera garantie par la société commercialisant le produit. Dans le cas des surfaces de mer et particulièrement si elles sont en mouvement, il n'y a aucune reproductibilité possible. Un profil de vague en fonction du temps peut être mathématiquement caractérisé, être en accord la mécanique des fluide, néanmoins il serait vain de chercher à retrouver ce même profil dans un contexte maritime réel. Ce constat amène clairement à adopter un point de vue légèrement décalé sur l'utilisation des méthodes numériques pour aborder le problème. Un résultat issu d'un logiciel boîte noire, même s'il est numériquement correct, peut s'avérer peu pertinent. Le développement de solutions numériques peut donc répondre à une optique différente. Les approches numériques doivent servir à mettre en évidence des phénomènes physiques que l'on pourra observer ultérieurement en contexte réel. Par ailleurs, on peut idéalement espérer que l'approche numérique elle-même aide à comprendre les phénomènes en jeu. Ainsi, il est souvent intéressant de considérer des approches numériques parfois moins précises mais dont la robustesse permettra la reproductibilité de l'observation, voire même, par le choix du modèle sur lequel ces approches sont fondées, d'éclairer l'interprétation des résultats. En ce qui concerne mes activités de recherche dans ce domaine, et mis à part quelques travaux en différences finies et en éléments finis [23], les approches investiguées s'appuyaient sur les modèles d'intégrale de frontière et des méthodes de moments (Method of Moments-MoM).

### 6.4.1 Méthode des moments classique

À partir de équations de Maxwell, en appliquant le théorème de Green, on peut montrer que le champs électromagnétique vérifie deux équations intégrales classiques [24-27], l'Équation Intégrale du Champ Électrique (EICE) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = & - \frac{\mathbf{M}_s(\mathbf{r})}{2} + \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ \int \mathbf{M}_s \times \nabla' G d\mathbf{r}' + i\omega\mu \int \mathbf{J}_s G d\mathbf{r}' \right. \\ & \left. - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla \int (\nabla' \cdot \mathbf{J}_s) G d\mathbf{r}' \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

et l'Équation Intégrale du Champ Magnétique (EICM) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{2} - \mathbf{n} \times \left\{ \int \mathbf{J}_s \times \nabla' G d\mathbf{r}' + i\omega\epsilon \int \mathbf{M}_s G d\mathbf{r}' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \int (\nabla' \cdot \mathbf{M}_s) G d\mathbf{r}' \right\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{J}_s$  et  $\mathbf{M}_s$  sont respectivement les courants surfaciques électrique et magnétique, les champs incidents  $\mathbf{E}^{inc}$  et  $\mathbf{H}^{inc}$  étant supposés connus.  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale à la surface et  $G$  la fonction de Green.  $\omega$ ,  $\mu$  et  $\epsilon$  sont respectivement la fréquence angulaire, la perméabilité magnétique et la permittivité électrique.

Le principe général de la résolution des équations intégrales par la Méthode des Moments (MoM) peut se résumer en trois étapes [28, 29] :

- Construction des équations intégrales pour modéliser le problème posé.
- Discrétisation des équations intégrales en utilisant les fonctions de base  $\mathbb{B}$  et de test  $\mathbb{T}$  pour former un système matriciel linéaire.
- Résolution du système matriciel linéaire pour obtenir les paramètres inconnus du problème.

De façon formelle, les équations intégrales linéaires peuvent s'écrire :

$$\mathbf{S} = \mathcal{L}\mathbf{f} \quad (6.6)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur intégrale,  $\mathbf{S}$  est la fonction connue et  $\mathbf{f}$  est la fonction inconnue. Afin de discrétiser ces équations en utilisant la méthode MoM, la fonction inconnue  $\mathbf{f}$  est approchée par  $\mathbf{f}^B$ , une combinaison linéaire finie de la fonction de base  $\mathbb{B}_b$  :

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{f}^B = \sum_{b=1}^B I_b \mathbb{B}_b, \quad b = 1, 2, \dots, B \quad (6.7)$$

où  $I_b$  sont les coefficients inconnus à déterminer. Le résidu de l'équation est défini par :

$$\mathfrak{R} = \mathbf{S} - \mathcal{L}\mathbf{f}^B = \mathbf{S} - \sum_{b=1}^B I_b \mathcal{L}\mathbb{B}_b \quad (6.8)$$

Une base de fonctions de test, très souvent la même que celle des fonctions de bases, est ensuite choisie. On cherche alors la solution du problème telle que la projection du résidu  $\mathfrak{R}$  sur chaque fonction test s'annule :

$$\langle \mathbb{T}_a, \mathfrak{R} \rangle = 0 \quad a = 1, 2, \dots, A \quad (6.9)$$

En substituant (6.8) dans (6.9), nous obtenons la relation :

$$\langle \mathbb{T}_a, \mathbf{S} \rangle = \sum_{b=1}^B I_b \langle \mathbb{T}_a, \mathcal{L}\mathbb{B}_b \rangle \quad (6.10)$$

Nous pouvons exprimer l'équation (6.10) sous la forme du système matriciel linéaire suivant :

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{I}_b \quad (6.11)$$



avec les composants des matrices :

$$\mathbf{V}_a = \langle \mathbf{T}_a, \mathbf{S} \rangle \quad (6.12)$$

$$\mathbf{Z}_{ab} = \langle \mathbf{T}_a, \mathcal{L}\mathbb{B}_b \rangle \quad (6.13)$$

La résolution du système d'équations linéaires est ensuite classiquement obtenue en appliquant la technique de Gauss-Jordan, la décomposition de Cholesky ou encore la décomposition LU [30].

En dimension 2, les fonctions de base et de test utilisées dans la méthode MoM-Classique sont des fonctions constantes (pulse) et des fonctions linéaires continues (triangle) :

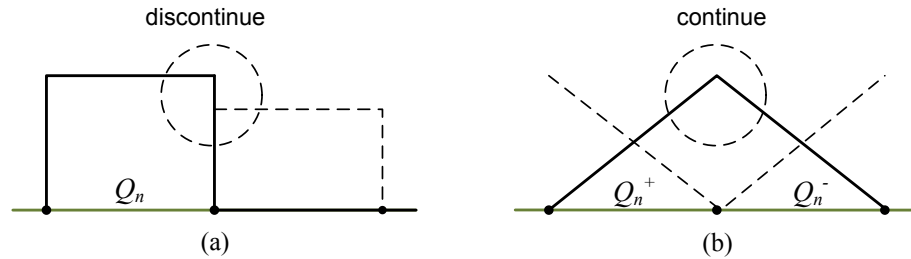


Figure 6.8 – Fonctions de base de la méthode MoM-Classique 2D (a) pulse (b) triangle, extrait de [31].

En dimension 3, on utilise généralement un maillage triangulaire ou quadrilatère. Pour chaque type de maillage, nous pouvons introduire les fonctions de base constantes et linéaires continues. La figure (6.9) montre 4 fonctions de base/test que nous pouvons utiliser.

### 6.4.2 Méthode des moments d'ordre supérieur

Pour qu'une méthode des moments donne des résultats corrects, avec une onde électromagnétique de longueur  $\lambda$ , il est souvent conseillé de choisir une taille de maillage inférieure à  $\lambda/4$ , voire  $\lambda/10$  pour une excellente précision. Ces bornes sont généralement données pour des problèmes génériques ne présentant pas de difficultés particulières. Or, pour une surface de mer, on constate que les vagues peuvent présenter des courbes relativement lisses à certains endroits et au contraire des courbures très fortes, voir de véritables pics, à d'autres. C'est cet état de fait qui m'a conduit à proposer une thèse pour voir dans quelle mesure les méthodes d'ordres supérieurs pouvaient aider à modéliser numériquement le champ électromagnétique diffusé par les vagues ayant de fortes courbures. Cette thèse a été menée par R. Khairi sous la direction d'A. Khenchaf.

L'idée des ordres supérieurs est de considérer des fonctions test/base non plus comme des constantes ou linéaires sur un élément de maillage, mais comme des fonctions polynomiales d'ordre  $n$ . Le choix des polynômes peut bien sûr prêter à débat. Néanmoins, un choix pertinent peut se porter sur les polynômes orthogonaux proposés par E. Jorgensen [32] qui permettent à la fois l'imposition de la continuité et le développement d'un système matriciel stable. Ces polynômes sont

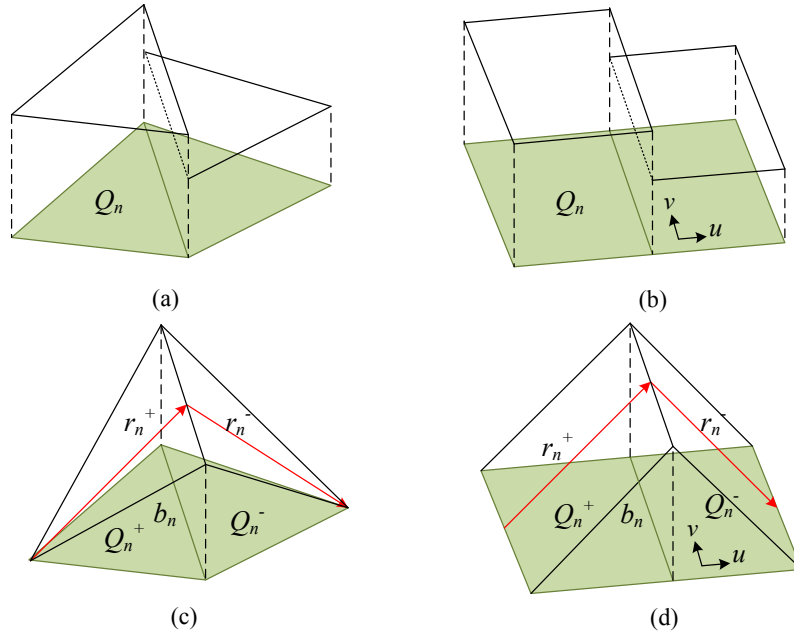


Figure 6.9 – Fonctions de base de la méthode Mm-Classique 3D (a) pulse triangulaire (b) pulse quadrilatère (c) RWG (d) *Rooftop*, extrait de [31].

donnés par :

$$\mathbb{B}_n^N(u) = \tilde{L}_n^N(u) = \begin{cases} 1 - u & n = 0 \\ 1 + u & n = 1 \\ L_n^N(u) - L_{n-2}^N(u) & n \geq 2 \end{cases} \quad \text{avec } u \in [-1, 1] \quad (6.14)$$

où  $L_n^N$  sont des polynômes de Legendre d'ordre  $N$  avec les membres de polynômes  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Les polynômes de Legendre sont donnés par la formule de Rodriguez suivante :

$$L_n^N(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} \left[ (u^2 - 1)^n \right] \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.15)$$

La représentation de ces polynômes pour l'ordre  $N = 5$  est montrée dans la figure (6.10). Les deux premiers membres des polynômes ( $n = 0$  et  $n = 1$ ) sont des fonctions linéaires. Celles-ci nous permettent de définir deux types de fonctions de base d'ordre supérieur : « discontinue » et « continue ». Pour le premier type, chaque coefficient de polynômes pour chaque sous-domaine est calculé librement alors que pour le deuxième type, nous imposons la continuité entre les sous-domaines voisins comme le montre la figure (6.11). Les termes supérieurs ( $n \geq 2$ ) sont nuls sur l'extrémité et n'interviennent pas pour la continuité de la fonction.

Un résultat important obtenu dans cette étude a été qu'effectivement l'ordre élevé permettait en grande partie de résoudre les problèmes de forte courbure locale. Une analyse comparative [33] avec des solutions analytiques (formes circulaires et sphériques) montrent les gains en terme de précision, voir par exemple à la figure 6.12 l'une des courbes tirées de cette étude.

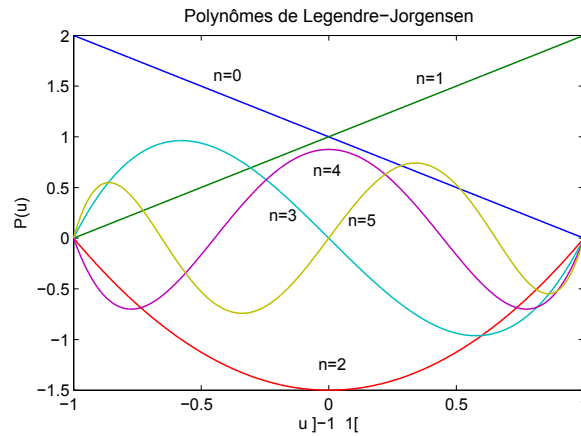


Figure 6.10 – Polynômes de Legendre-Jorgensen [32], extrait de [31].

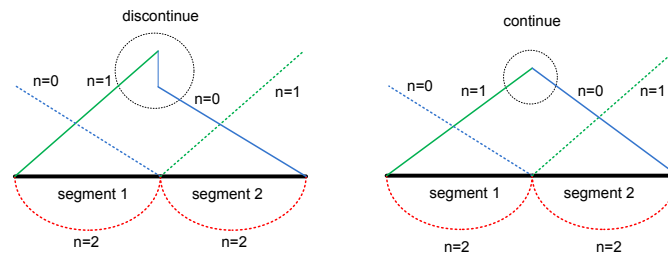
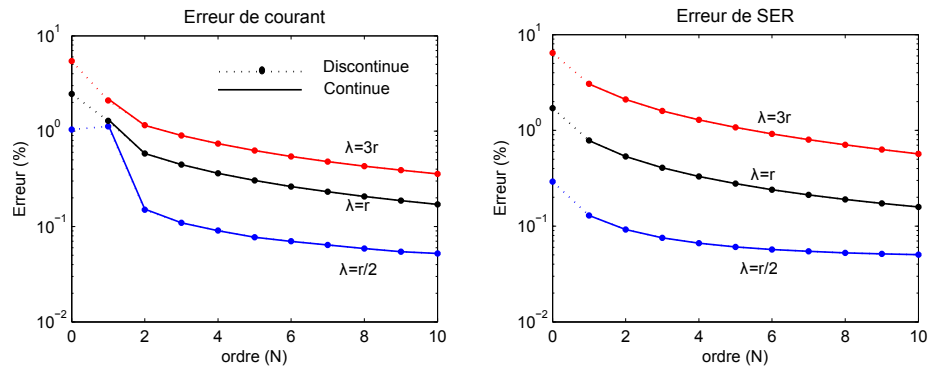


Figure 6.11 – Fonctions de base d'Ordre Supérieur : continue et discontinue, extrait de [31].

Figure 6.12 – Erreur des courants et des SER en fonction de l'ordre  $N$  et de longueur d'onde  $\lambda$  (en polarisation verticale) avec  $r$  le rayon de courbure, extrait de [31].

En dimension 3, E. Jorgensen a proposé d'utiliser les polynômes bi-dimensionnels suivants [32] :

$$\mathbb{B}_{mn}^{MN}(u) = \tilde{L}_m^M(u) L_n^N(v) \quad (6.16)$$

$$\mathbb{B}_{mn}^{MN}(v) = \tilde{L}_m^M(v) L_n^N(u) \quad (6.17)$$

où  $u, v \in [-1, 1]$  représentent une surface bidimensionnelle arbitraire,  $L_n^N$  est le polynôme de Legendre et  $\tilde{L}_m^M$  est le polynôme de Legendre-Jorgensen. Les polynômes sont donnés pour  $m = [0, 1, 2 \dots M]$  et  $n = [0, 1, 2 \dots N]$  avec  $M$  et  $N$  indiquant l'ordre des polynômes bi-dimensionnels. Nous notons que les termes  $B_{0,0}^{MN}$  et  $B_{0,1}^{MN}$  sont les fonctions linéaires. En imposant la continuité de ces termes, nous obtenons la fonction de base *Rooftop*. Pour  $m \geq 2$ , la fonction est zéro sur l'extrémité. Ils ne participent donc pas au terme de la continuité de la fonction. La fonction de base jusqu'à l'ordre  $M, N = 2, 2$  est montrée dans la figure (6.13)

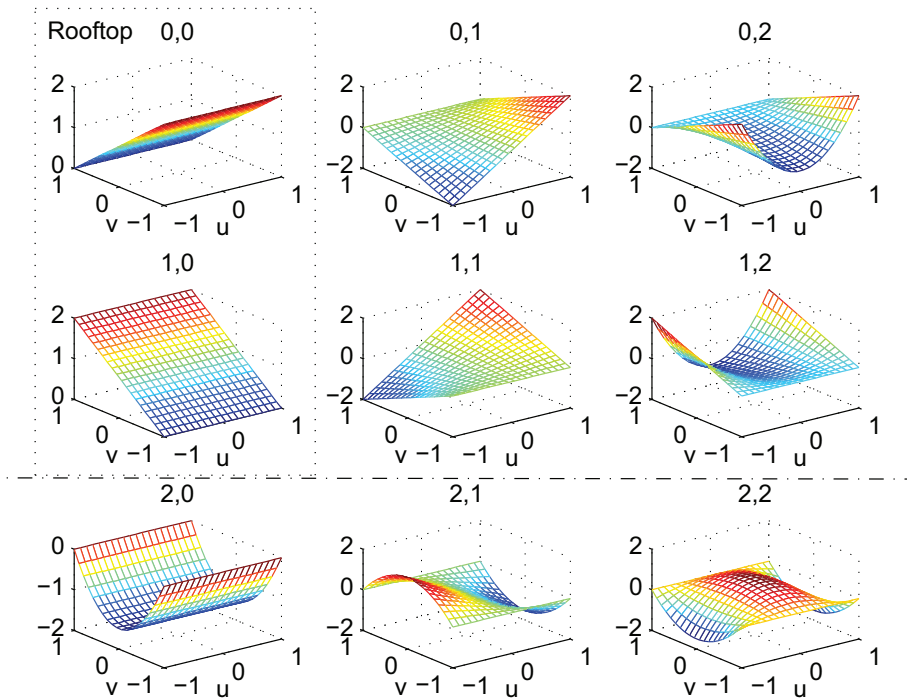


Figure 6.13 – Fonctions de base d'ordre supérieur ( $M=2$  et  $N=2$ ), extrait de [31].

En notant  $Q$  comme le nombre de maillage, le nombre d'inconnues dans la MoM-OS est  $Q(M+1)(N)$  lorsque nous imposons la continuité et  $Q(M+1)(N+1)$  lorsque la continuité n'est pas imposée.

### 6.4.3 Méthode des moments adaptative multi-échelle

Les méthodes des moments cherchent à décomposer une fonction inconnue sur une base de fonctions polynomiales connues. Sur une maille spatiale petite ou grande, on essaie donc d'identifier

une pondération sur les coefficients d'un polynôme (réduit à une fonction linéaire ou constante dans les cas classiques). L'échelle d'analyse numérique du problème est la taille de la maille spatiale sur une zone d'intérêt. La question que je me suis posée était de savoir si, sur certaines zones du phénomène de diffusion électromagnétique, il pouvait y avoir de effets multi-échelles, c'est à dire des pondérations significatives sur une maille de taille donnée et en même temps sur l'ensemble des mailles de taille inférieure qu'elle contient. Il est à noter qu'un certain nombre d'études, notamment dans les années 1990 [34-38], ont montré, par une vision plus théorie des ondelettes, que ce type d'analyse pouvait être intéressante. Pour ma part, je me suis davantage inspiré des travaux de C. Su [39-41] qui a développé la méthode Adaptive Multiscale Moment Method (AMMM).

Pour la méthode des moments classique [26, 42]), comme nous l'avons vu précédemment, la fonction inconnue peut se décomposer sur une base de fonctions triangle  $\Psi_i(x)$ , voir figure 6.14.

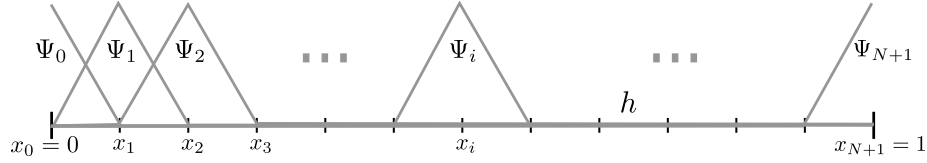


Figure 6.14 – Fonctions de base triangle  $\Psi_i(x)$  sur plusieurs mailles entre 0 et 1 ( $h = x_{i+1} - x_i = 1/N$ ), extrait de [43].

Dans la méthode des moments multi-échelle, les bases de fonctions vont se construire itérativement. Soit  $f(x)$  une fonction à valeur réelle. Par simplicité, on suppose que  $f(x)$  est définie entre  $x_{0,0} = 0$  et  $x_{0,1} = 1$ . Une interpolation linéaire entre  $x_{0,0}$  et  $x_{0,1}$  est donnée par :

$$f_0(x) = f(x_{0,0})\phi_0(x) + f(x_{0,1})\phi_1(x) \quad (6.18)$$

où

$$\phi_0(x) = \phi_{0,1}(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.19)$$

et

$$\phi_1(x) = \phi_{0,2}(x-1) \quad \phi_{0,2}(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1, 0[ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.20)$$

Cette interpolation représente l'approximation à échelle 0 de la fonction  $f(x)$ . À cette échelle 0, les fonctions de base  $\phi_0(x)$  et  $\phi_1(x)$  sont simplement la base de fonctions triangulaires.

À la 1<sup>ère</sup> échelle, le point milieu  $x_{1,1} = (x_{0,0} + x_{0,1})/2 = 1/2$  est pris en compte dans l'interpolation, et l'approximation prend la forme :

$$f_1(x) = f_0(x) + \tau_{1,1}\phi_{1,1}(x) \quad (6.21)$$

où  $\phi_{1,1}(x) = (\phi_{0,1}[2(x-x_{1,1})] + \phi_{0,2}[2(x-x_{1,1})])$ .

En supposant que  $f_1(x_{1,1}) = f(x_{1,1})$ , nous obtenons :

$$\tau_{1,1} = f(x_{1,1}) - f_0(x_{1,1}) = f(x_{1,1}) - \frac{1}{2}(f(x_{0,0}) + f(x_{0,1})) \quad (6.22)$$

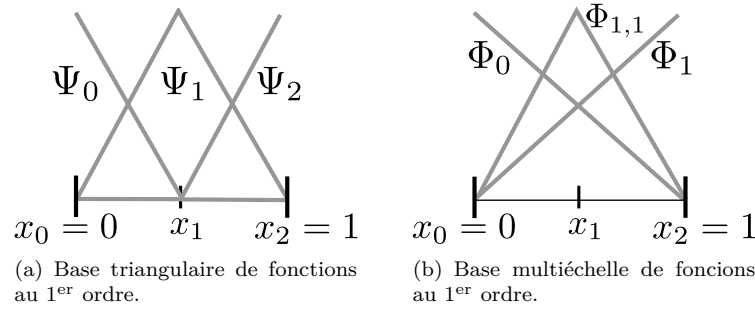


Figure 6.15 – Fonction de base avec  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = x_{1,1}$  et  $x_2 = 1$  au premier ordre, extrait de[43].

En considérant les trois points  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = x_{1,1}$  and  $x_2 = 1$ , la base de fonctions à la 1<sup>ère</sup> échelle est donnée par  $\phi_0(x)$ ,  $\phi_1(x)$  et  $\phi_{1,1}(x)$ , voir figure 6.15(b). Il est clair que les fonctions de la 1<sup>ère</sup> échelle ne sont plus équivalentes aux fonctions triangulaires de la base classique, voir figure 6.15. Contrairement à la base des fonctions triangulaires classique, cette nouvelle base associe deux échelles : l'échelle 0 avec  $\phi_0(x)$  and  $\phi_1(x)$ , et la 1<sup>ère</sup> échelle avec  $\phi_{1,1}(x)$ .

Au premier ordre, les deux bases (multi-échelle et triangulaire) sont reliées linéairement :

$$\Psi_1 = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2)^T = T_1 \cdot (\Phi_0, \Phi_1, \Phi_{1,1})^T = T_1 \cdot \Phi_1 \quad \text{where} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Au second ordre, deux nouveaux points  $x_{2,1} = (x_{0,0} + x_{1,1})/2 = 1/4$  et  $x_{2,2} = (x_{1,1} + x_{0,1})/2 = 3/2$  sont pris en compte, et l'approximation au second ordre peut être défini par :

$$f_2(x) = f_1(x) + \tau_{2,1}\phi_{2,1}(x) + \tau_{2,2}\phi_{2,2}(x) \quad (6.24)$$

où

$$\phi_{2,1}(x) = (\phi_{0,1} [2^2(x - x_{2,1})] + \phi_{0,2} [2^2(x - x_{2,1})]) \quad (6.25)$$

et

$$\phi_{2,2}(x) = (\phi_{0,1} [2^2(x - x_{2,2})] + \phi_{0,2} [2^2(x - x_{2,2})]) . \quad (6.26)$$

Le processus se poursuit de la même façon qu'au premier ordre pour obtenir les bases de fonctions à l'ordre 2, voir figure 6.16, et à un ordre quelconque  $n$ .

En plus de la méthode de création de fonctions de base multi-échelle, la méthode AMMM s'accompagne d'une méthode de sélection des niveaux d'échelle les plus pertinents en utilisant une technique de seuillage dynamique. Appliqué au contexte de la diffusion électromagnétique par des surface de mer, on peut montrer que des effets d'échelles apparaissent aux points de réflexion spéculaire [43, 44].

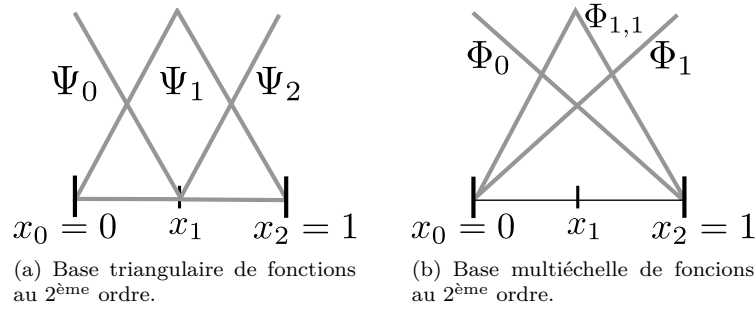


Figure 6.16 – Fonction de base avec  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = x_{2,1}$ ,  $x_2 = x_{1,1}$ ,  $x_3 = x_{2,2}$  et  $x_4 = 1$  au second ordre, extrait de[43].

## 6.5 Les vagues déferlantes

Parmi les surfaces de mer qui posent des difficultés pour la modélisation électromagnétique numérique, le cas des vagues déferlantes est certainement l'un des plus intéressants. De par leur structure géométrique, les vagues déferlantes constituent des diffuseurs électromagnétiques forts, en polarisation horizontale ou verticale, que l'on différencie très bien des composantes du champ diffusé liées aux autres éléments de surface de mer.

Le déferlement des vagues est essentiellement induit par deux causes hydrodynamiques. D'une part, la présence de très forts vents sur une durée significative générant des houles de grande amplitude. La seconde cause, qui correspond davantage à nos préoccupations, est l'effet d'un fond marin peu important et surtout l'inclinaison de ce fond marin sur la houle. En effet, les caractéristiques géométriques du fond induisent des modifications de la hauteur des vagues et surtout de la cambrure de celles-ci. On voit alors généralement apparaître des vagues déferlantes se propageant selon trois modes : glissant, plongeant et gonflant, voir figure 6.17.

### 6.5.1 Génération des profils de vagues déferlantes

Simuler un profil de surfaces de mer 2D ou 3D classique peut se faire sans trop de difficultés à partir de la connaissance de son spectre fréquentiel. Il suffit pour cela de simuler des phases aléatoires liées aux différentes fréquences, puis de réaliser une transformation de Fourier inverse, voir figure 6.18. Le mouvement de cette surface est enfin obtenu en introduisant une célérité de phase pour chaque fréquence, loi de dispersion.

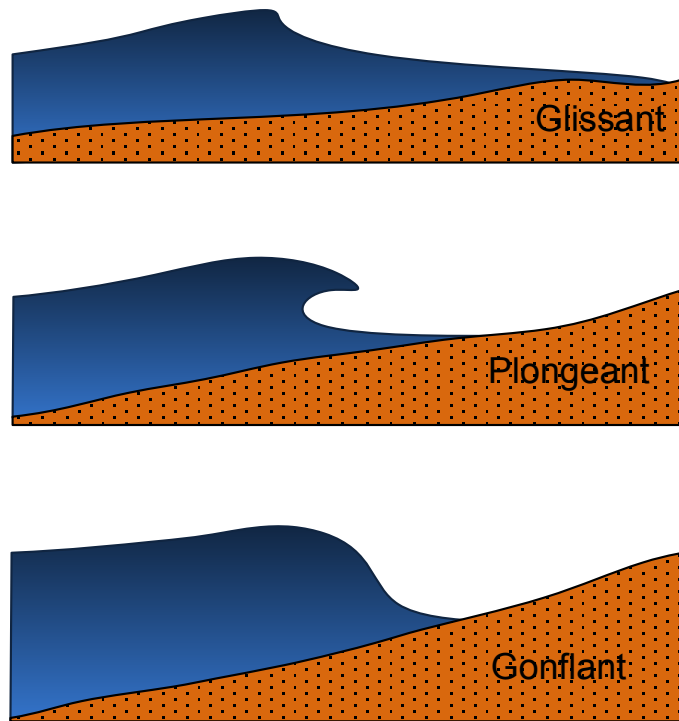


Figure 6.17 – La houle sur la zone côtière et représentation schématique des différents modes de vagues déferlantes (glissant, plongeant et gonflant), extrait de [31].

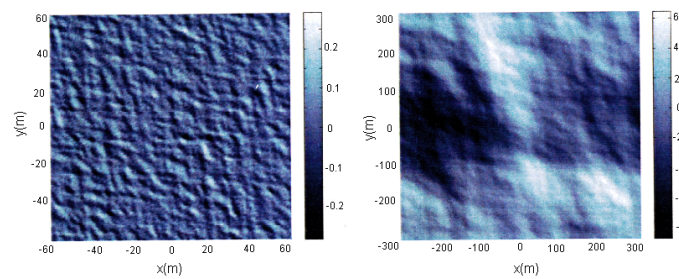


Figure 6.18 – Réalisation de deux types de surface avec le spectre d'Elfouhaily pour deux valeurs de vitesses du vent (3 m/s et 20 m/s), extrait de [31].



S'agissant de vagues déferlantes, la problématique de simulation des profils devient beaucoup plus ardue dans la mesure où il faut explicitement prendre en compte les équations hautement non-linéaires de l'hydrodynamique. Sans aller jusqu'aux équations de Navier-Stokes et, même au prix de quelques éléments de simplification, il reste néanmoins à résoudre des équations différentielles par des procédés numériques lourds [45, 46]. Différentes approches sont envisageables comme la méthode des Différences Finies [47] ou celle des Éléments Finis [48]. Plusieurs travaux de modélisation hydrodynamiques utilisant une approche sous forme intégrale et la Méthode des Éléments de Frontières ont été réalisés. Nous pouvons citer par exemple le modèle Long-tank [49, 50] ou Grilli et al [51, 52]. Dans le cadre de mes recherches et en collaboration avec mes collègues de l'ENSTA Bretagne en mécanique des fluides, j'ai plutôt opté pour une méthode dite désingularisée qui est très efficace du moins en 2D.

Pour étudier numériquement le mouvement des vagues déferlantes, nous nous plaçons dans le cas d'un réservoir fermé (tank) comme le montre la figure (6.19). En considérant le fluide comme irrotationnel, non-visqueux et incompressible, on peut le décrire par le biais de son potentiel de vitesse  $\Psi$ , qui vérifie alors l'équation de Laplace ( $\Delta\Psi = 0$ ) dans le domaine du fluide. Les frontières rigides (le fond et les niveaux latéraux) sont considérés imperméables et représentés par la condition de Neumann ( $\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0$ ). La surface libre, notée  $Fs(t)$ , est soumise à une condition de Dirichlet homogène  $\Psi = 0$ . Le domaine global contenant le fluide est noté  $\Omega(t)$  et sa frontière est notée  $\partial\Omega(t)$ .

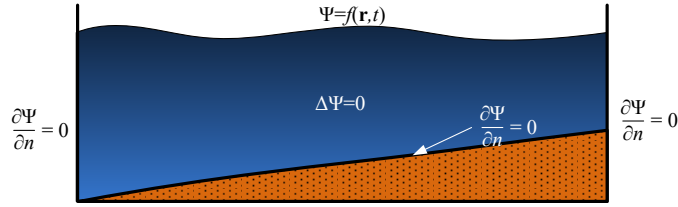


Figure 6.19 – Potentiel, extrait de [31].

Il faut également noter que le potentiel de vitesse  $\Psi$  évolue en fonction de temps. Avec la continuité de la vitesse et de la pression sur la surface libre, nous pouvons montrer que ce potentiel suit un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{2} |\nabla\Psi|^2 - g\mathcal{E} \quad (6.27)$$

$$\frac{dx}{dt} = U_x \quad (6.28)$$

$$\frac{dz}{dt} = U_z \quad (6.29)$$

où  $U_x$  et  $U_z$  représentent les composantes de la vitesse du fluide  $\mathbf{U}$  dans les plans  $\hat{x}$  et  $\hat{z}$ .

La méthode désingularisée [53, 54], pose que le potentiel peut se décrire comme une somme de contributions de sources  $\mathbf{r}'$  situées en dehors du domaine fluide, contrairement aux méthodes intégrales classiques où les sources sont situées sur la frontière :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \chi_n(\mathbf{r}'_n) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n) \quad (6.30)$$

où  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n)$  est la fonction de Green de l'équation de Laplace, ce qui donne en 2D :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \log(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (6.31)$$

La question principale qui se pose dans cette méthode est la détermination de la position optimale des points d'observation afin d'avoir un meilleur résultat numérique. E.O. Tuck [55] a présenté le choix intéressant de les situer à la distance suivante :

$$L_d = \alpha \frac{L}{N}, \quad 2 \leq \alpha \leq 3 \quad (6.32)$$

$L_d$  est la distance du point d'observation avec la surface dans la direction normale,  $L$  est la largeur de tank et  $N$  est le nombre de points d'observation.

Pour rendre cette approche très efficace numériquement, Y.-M. Scolan [56] a proposé de combiner la méthode désingularisée avec une série de transformations conformes qui simplifie considérablement les calculs. Avec cette démarche, toutes les limites de Neumann en système de coordonnées  $\hat{x} - \hat{z}$  (A-B-C-D-E) sont converties sous une forme plus simple dans le système de coordonnées  $\hat{u} - \hat{v}$  (segment A-E). La figure (6.20) montre la démarche utilisée pour faire une transformation conforme du système.

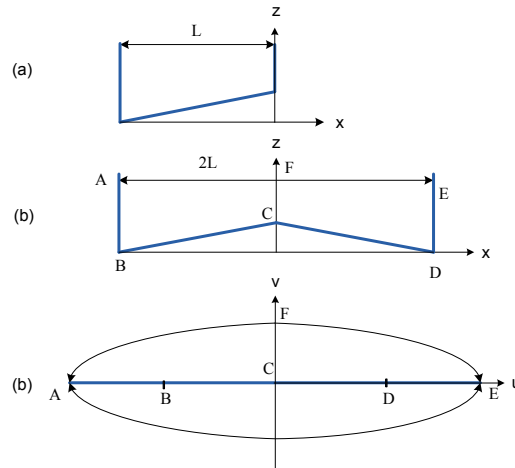


Figure 6.20 – Transformation conforme appliquée sur le domaine d'étude (a) problème initial dans le plan  $\hat{x} - \hat{z}$  (b) problème symétrique dans le plan  $\hat{x} - \hat{z}$  (c) transformation dans le plan  $\hat{u} - \hat{v}$ , extrait de [31].

La transformation conforme conserve l'équation de base dans le fluide (Laplacien nul). Travailler dans cette nouvelle géométrie permet d'obtenir une expression de la fonction de Green qui vérifie implicitement les conditions de Neumann. L'évaluation de la conditions aux frontières se limite alors uniquement à la surface libre.

Dans la nouvelle géométrie, nous travaillons sur quatre domaines symétriques dans le plan complexe. La modification pour la fonction de Green doit être effectuée et est donnée par : [56] :

$$G(\omega, \omega') = \log \left( \left| \omega^4 - 2\omega \Re(\omega') + (\omega')^4 \right| \right) \quad (6.33)$$

où  $\omega$  et  $\omega'$  sont les points d'observation et les points source dans un nouveau système de coordonnées  $(u - v)$  et  $\Re$  désigne la partie réelle du système de coordonnées. L'évaluation de la surface libre dans ce nouveau système de coordonnées correspond à la résolution du système d'EDO. Une fois que le profil de surface libre est calculé dans la nouvelle géométrie, nous pouvons revenir dans le système de coordonnées initial par la transformation conforme inverse. La figure 6.21 donne un exemple de simulation de profils successifs.

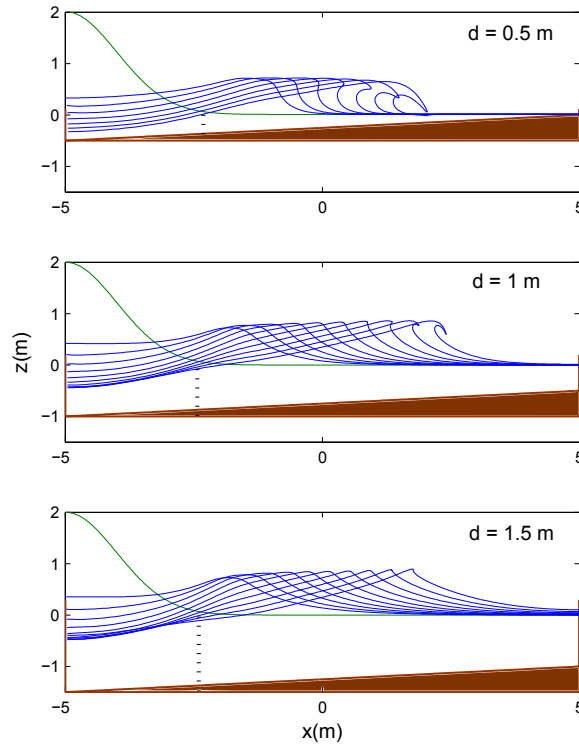


Figure 6.21 – Profils des vagues déferlantes en fonctions de la profondeur relative  $d$ , extrait de [31].

### 6.5.2 Simulation des champs électromagnétiques diffusés par les vagues

La simulation du champ électromagnétique diffusé par une vague déferlante constitue un problème de calcul numérique délicat, car les très fortes courbures impliquent une faible convergence des algorithmes classiques [57, 58]. Les travaux menés dans le cadre de la thèse de R. Khairi, en s'appuyant sur un contrôle de l'erreur numérique dans les cas de forte courbure, ont permis de réaliser ces simulations, en utilisant la méthode des moments d'ordres supérieurs, pour des vagues déferlantes : glissantes, plongeantes ou gonflantes. La figure 6.22 est le résultat de l'une des très nombreuses simulations réalisées au cours de ce travail. On peut y voir nettement les effets de cavité liés à la courbure de la vague plongeante.

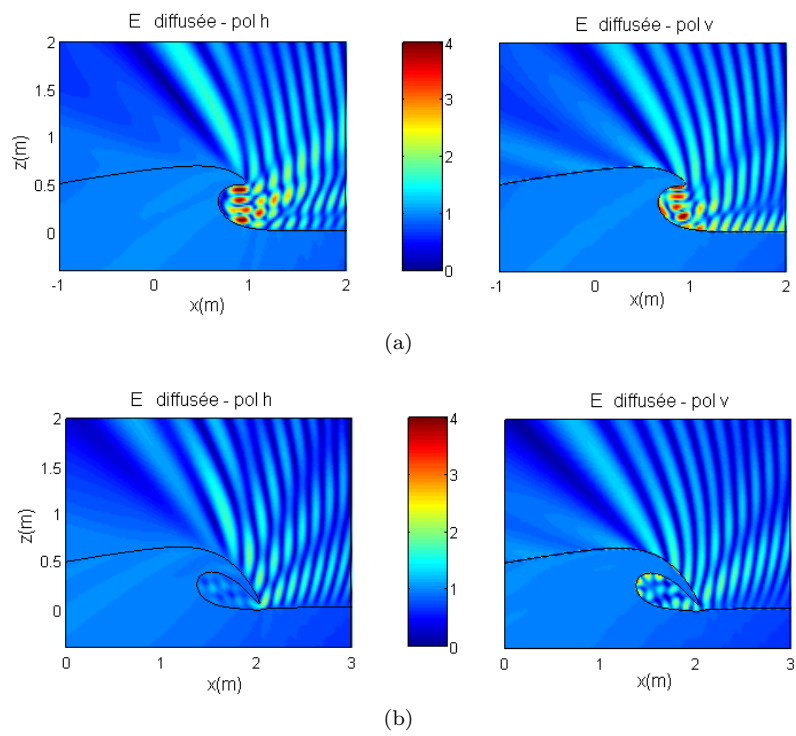


Figure 6.22 – Ondes diffusées à proximité de la cavité de vague pour 2 profils avec déferlement plongeant : polarisations horizontale et verticale, angle incident  $45^\circ$ , extrait de[31].

### 6.5.3 Pour aller plus loin

La méthode désingularisée a été appliquée pour simuler le profil de vagues déferlantes. Cette méthode semble bien adaptée aux équations aux dérivées partielles elliptiques, ce qui est le cas pour l'équation de Laplace. Or l'équation de Helmholtz qui décrit les ondes électromagnétiques, est aussi une équation aux dérivées partielles de type elliptique. Des travaux [59-62] ont été menés pour appliquer l'approche désingularisée à la problématique électromagnétique. Des collègues en mécanique des fluides et moi-même envisageons de traiter le problème complet des vagues déferlantes et du champ électromagnétique diffusé par cette approche. Cela pourrait permettre d'établir des liens explicites entre la dynamique du fluide et celle de champ électromagnétique.

## 6.6 Conclusion

Ce chapitre, dans le cadre de mon activité en télédétection des milieux maritimes, cherche à développer un point de vue spécifique en se focalisant sur le lien entre le champ électromagnétique et la dynamique des vagues. En terme méthodologique, ce point de vue m'a incité à développer de nouvelles approches de modélisations, notamment numériques, tout en essayant de conserver une relation entre ces modélisations numériques et l'interprétation qualitative des phénomènes physiques en jeu.

D'une manière plus globale, le travail décrit ici a aussi été l'occasion de mettre en lumière de nouvelles problématiques comme la création et l'annihilation dynamique de diffuseurs liés au mouvement du fluide, voire même à l'apparition de phénomènes de bifurcation dans cette dynamique. Ces réflexions se sont d'ailleurs révélées très importantes lorsqu'il s'est agi de reprendre la thématique en adoptant une vision stochastique, voir chapitre suivant.

## Références

1. Mouche, A. A., Chapron, B., Reul, N. & Collard, F. Predicted Doppler shifts induced by ocean surface wave displacements using asymptotic electromagnetic wave scattering theories. *Waves in Random and Complex Media* **18**, 185-196 (2008).
2. Coatanhay, A. & Baussard, A. *Qualitative Analysis of the Time-Frequency Signature Induced by a Reflected L-Band Signal from Time Evolving Sea Surfaces*. arXiv :1312.6015 [physics.aoph]. 2013.
3. Coatanhay, A. *Simulation of GPS signal in a forest environment using a coherent fractal tree model* in *Mediterranean Microwave Symposium* (2004).
4. Coatanhay, A. *Amélioration du rapport signal à bruit par des techniques antennaires* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2005).
5. Coatanhay, A. *Réception des signaux GPS en milieux boisés* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2004).
6. Coatanhay, A. *Détection de signaux GPS à très faible rapport signal à bruit* rapp. tech. Etude contractuelle avec le LRBA (DGA, Vernon) (ENSTA Bretagne, 2003).
7. Coatanhay, A., Garello, R., Chapron, B. & Ardhuin, F. *Project MOPS - Marine Opportunity Passive Systems* in *PASSIVE* (Hyères, France, 14-17 October 2008).

8. Coatanhay, A., Garello, R., Chapron, B. & Ardhuin, F. *Le Projet MOPS - La perception du milieu marin par un système de mesure passive utilisant les signaux GNSS* in *Sea Tech week* (Brest, France, 13-17 October 2008).
9. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Simulation of a GNSS signal for a receiver near a time-evolving sea surface* in *ICEAA07* (2007).
10. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Model of GPS signal from the ocean based on an electromagnetic scattering theory : Two Scale Model (TSM) approach* in *IGARSS* (2005).
11. Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Simulation of GALILEO signals in a maritime environment using an electromagnetic scattering model : influence of the sea state* in *OCEANS05* (2005).
12. Comblet, F., Betaille, D., Peyret, F., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *GPS and MEMS : high positioning integrity* in *ITST* (Sophia Antipolis, France, juin 2007).
13. Baussard, A. & Coatanhay, A. *Evaluating GNSS Signals for Passive Local Sea State Monitoring*. in *SPACE REFLECTO* (Brest, France, 04-05 November 2013).
14. Tay, S. *Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin* thèse de troisième cycle (Télécom Bretagne, Université de Rennes 1, 2012).
15. Garrison, J. L., Voo, J. K., Yueh, S. H., Grant, M. S., Fore, A. G. & Haase, J. S. Estimation of Sea Surface Roughness Effects in Microwave Radiometric Measurements of Salinity Using Reflected Global Navigation Satellite System Signals. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* **8**, 1170-1174 (2011).
16. Komjathy, A., Zavorotny, V. U., Axelrad, P., Born, G. H. & Garrison, J. L. GPS Signal Scattering from Sea Surface : Wind Speed Retrieval Using Experimental Data and Theoretical Model. *Remote Sensing of Environment* **73**, 162-174 (2000).
17. Marchan-Hernandez, J. F., Vall-llossera, M., Camps, A., Rodriguez-Alvarez, N., Ramos-Perez, I., Valencia, E., Bosch-Lluis, X., Talone, M., Tarongi, J. M. & Piles, M. *Ground-Based GNSS-R Measurements with the PAU Instrument and their Application to the Sea Surface Salinity Retrieval : First Results* in *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)* **4** (2008), 530-533.
18. Voo, J. K., Garrison, J. L., Yueh, S. H., Grant, M. S., Fore, A. G., Haase, J. S. & Clauss, B. *Application of Reflected Global Navigation Satellite System (GNSS-R) Signals in the Estimation of Sea Roughness Effects in Microwave Radiometry* in *11th Specialist Meeting on Microwave Radiometry and Remote Sensing of the Environment (MicroRad)* (2010), 140-145.
19. Tay, S., Coatanhay, A., Maussang, F. & Garello, R. *A tracking algorithm for GNSS reflected signals on sea surface* in *IGARSS* (Honolulu, Hawaiï, USA, 25-30 July 2010).
20. Tay, S., Maussang, F., Coatanhay, A., Chonavel, T. & Garello, R. *Near sea surface target tracking by extended Kalman filtering of the GPS reflected signals* in *OCEANS* (Santander, Spain, 06-09 June 2011).
21. Tay, S., Maussang, F., Coatanhay, A. & Garello, R. *Kalman filtering of GPS signals for target tracking application* in *PASSIVE* (Brest, France, 23-25 June 2010).
22. Tay, S., Maussang, F., Coatanhay, A. & Garello, R. *New concept of passive measure using GNSS reflected signals in oceanographic applications* in *Oceans* (Bremen, Germany, 11-14 May 2009).

23. Coatanhay, A. *Numerical modeling of the electromagnetic scattering by a sea surface : the MoM and Discontinuous Galerkin Method approaches* in ICEAA (Sydney, Australia, 20-24 September 2010).
24. Tsang, L., Kong, J. & Ding, K. *Scattering of Electromagnetic Waves : Theories and Applications* (John Willey & Sons inc, 2000).
25. Tsang, L., Kong, J., Ding, K. & Ao, C. *Scattering of Electromagnetic Waves : Numerical Simulations* (John Willey & Sons inc, 2001).
26. Tsang, L. & Kong, J. *Scattering of Electromagnetic Waves : Advanced Topics* (John Willey & Sons inc, 2001).
27. Orfanidis, S. *Electromagnetic Waves and Antennas* (Rutgers University, 2004).
28. Sadiku, M. *Numerical Techniques in Electromagnetics* (CRC Press LLC, 2001).
29. Bancroft, R. *Understanding Electromagnetic Scattering Using the Moment Method. A practical Approach* (Artech House, 1996).
30. Datta, K. B. *Matrix and Linear Algebra* (Prentice-Hall, Inc, 1991).
31. Khairi, R. *Modélisation de la diffusion électromagnétique par les vagues côtières déferlantes* thèse de troisième cycle (Université de Bretagne Occidentale, 2013).
32. Jørgensen, E. *Higher-order integral equation methods in computational electromagnetics* thèse de troisième cycle (Technical University of Denmark, 2003).
33. Khairi, R., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. Optimal High-Order Method of Moment combined with NURBS for the scattering by a 2D cylinder. *Advanced Electromagnetics* **2**, 33-43 (2013).
34. Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V. Fast wavelet transform and numerical algorithm I. *Comm. Pure Appl. Math.* **44**, 141-183 (1991).
35. Alpert, B. K., Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V. Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equation. *SIAM J. Sci. Comp.* **14**, 159-184 (1993).
36. Steinbery, B. Z. & Leviatan, Y. On the use of wavelet expansions in the method of moments. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **41**, 610-619 (1993).
37. Goswami, J. C., Chan, A. K. & Chui, C. K. On moments first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **43**, 614-622 (1995).
38. Wang, G. A hybrid wavelet expansion and boundary element analysis of electromagnetic scattering from conducting objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **43**, 170-178 (1995).
39. Su, C. & Sarkar, T. K. Adaptive Multiscale Moment Method (AMMM) for Analysis of Scattering From Three-Dimensional Perfectly Conducting Structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **50**, 444-450 (2002).
40. Su, C. & Sarkar, T. K. Adaptive Multiscale Moment Method (AMMM) for Analysis of Scattering from Perfectly Conducting Plates. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **48**, 932-939 (2000).
41. Su, C. & Sarkar, T. K. A multiscale moment method for solving Fredholm integral equation of the first kind. *PIER* **17**, 237-264 (1997).

42. Gibson, W. *The Method of Moments in Electromagnetics* (Chapman & Hall/CRC, 2008).
43. Coatanhay, A. & Scolan, Y.-M. Adaptive multiscale moment method applied to the electromagnetic scattering by coastal breaking sea waves. **38**, 2041-2052 (2015).
44. Coatanhay, A. & Scolan, Y.-M. *Simulation of the electromagnetic scattering by coastal breaking sea waves in L-band using Adaptive Multiscale Moment Method*. in *WISE* (Huatulco, Mexico, avr. 2013).
45. Ma, Q. *Advances in numerical simulation of nonlinear water waves* (World Scientific, 2010).
46. Lin, P. *Numerical modeling of water waves* (Taylor & Francis, 2008).
47. Schaeffer, B. *Possibilités des microordinateurs simulation numérique d'une vague déferlante, dont le mouvement en profondeur et le profil sont calculés par microordinateur* rapp. tech. (Association Technique Maritime et Aéronautique, Paris, 1988).
48. Ma, Q. & Yan, S. Quasi ALE Finite Element Method for nonlinear water waves. *Journal of Computational Physics* **212**, 52-72 (2005).
49. P. Wang, Y. Y. & Tulin, M. An efficient numerical tank for non-linear water waves based on the multi-subdomain approach with BEM. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **20**, 1315-1336 (1995).
50. Melief, H. *Dynamic modelling of radar sea clutter* thèse de troisième cycle (Technische Universiteit Delft, 2006).
51. Grilli, S. T., Skourup, J. & Svendsen, I. A. An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **6**, 97-107 (1989).
52. Lachaume, C., Biausser, B., Grilli, S. T., Fraunié, P. & Guignard, S. *Modeling of breaking and post-breaking waves on slopes by coupling of BEM and VOF methods* in *International Offshore and Polar Engineering Conference* (2003).
53. Cao, Y., Schultz, W. W. & Beck, R. F. *Three-dimensional desingularized boundary integral methods for potential problems* rapp. tech. (University of Michigan, 1990).
54. Cao, Y. *Computations of nonlinear gravity waves by a desingularized boundary integral method* rapp. tech. (University of Michigan, 1991).
55. Tuck, E. O. *Solution of nonlinear free-surface problems by boundary and desingularised integral equation techniques* in *Computational Techniques and Applications Conference* (1998).
56. Scolan, Y. M. Some aspects of the flip-through phenomenon : A numerical study based on the desingularized technique. *Journal of Fluids and Structures* **26**, 918-953 (2010).
57. West, J. & Zhao, Z. Electromagnetic modeling of multipath scattering from breaking water waves with rough faces. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **40**, 583-592 (2002).
58. Yang, W., Zhao, Z., Qi, C. & Nie, Z. Electromagnetic Modeling of Breaking Waves at Low Grazing Angles With Adaptive Higher Order Hierarchical Legendre Basis Functions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **49**, 346-352 (2011).
59. Reutskiy, S. Y. The method of fundamental solutions for Helmholtz eigenvalue problems in simply and multiply connected domains. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **30**. Non-Traditional Boundary Integral Formulations, Part II, 150-159. issn : 0955-7997 (2006).



60. Barnett, A. & Betcke, T. Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains. *Journal of Computational Physics* **227**, 7003-7026. issn : 0021-9991 (2008).
61. Karageorghis, A., Lesnic, D. & Marin, L. A survey of applications of the MFS to inverse problems. *Inverse Problems in Science and Engineering* **19**, 309-336 (2011).
62. Karageorghis, A. & Lesnic, D. Application of the MFS to inverse obstacle scattering problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **35**, 631-638. issn : 0955-7997 (2011).

## Chapitre 7

---

# Ondes et surfaces de mer : approche stochastique

---

Tout comme le chapitre précédent, on traite ici de la problématique de l'évolution temporelle du champ électromagnétique diffusé par une surface de mer. Néanmoins, il est posé, maintenant, que le profil de la surface de mer n'est pas ici explicitement connu. La surface est plutôt décrite par un ensemble de diffuseurs aléatoires qui évoluent dans le temps avec une certaine dynamique. Pour considérer ce point de vue, il devient nécessaire d'introduire de nouveaux outils mathématiques de modélisation stochastique. Un nouveau modèle, dit modèle de Field, qui s'appuie sur les systèmes d'équations différentielles stochastiques non-linéaires, est présenté. Ce sujet a fait l'objet d'un travail de thèse, menée sous mon encadrement et dirigée par Alexandre Baussard. Je présente ici les résultats obtenus sur la manipulation et la compréhension de ce modèle. Un point d'attention est porté sur l'identification des paramètres de ce modèle stochastique non-linéaire.

7.1	Quelques grains de pollen . . . . .	185
7.2	Surface de mer un ensemble de grains de pollen ? . . . . .	186
7.2.1	Somme de diffuseurs aléatoires . . . . .	186
7.2.2	Diffuseurs en mouvement (Modèle de Field) . . . . .	187
7.3	Travaux de recherche . . . . .	189
7.3.1	Inférence du clutter de mer . . . . .	189
7.3.2	Identification des paramètres du modèle . . . . .	192
7.3.3	Modèle de Field et présence d'une cible . . . . .	193
7.4	Non-observabilité de $x_t$ . . . . .	194
7.5	Pour aller plus loin . . . . .	196
7.6	Conclusion . . . . .	197

### 7.1 Quelques grains de pollen

En 1828, Robert Brown publie le manuscrit intitulé "Brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies" dans le Edinburgh new Philosophical Journal [1]. Dans cette publication, R. Brown a laissé en suspension certains grains de pollen de l'espèce *Clarkia Pulchella* dans de l'eau et les a examinés de près. Il constata

simplement que l'échantillon était remplis de particules d'environ  $5\mu m$  de diamètre et que ces particules étaient de "toute évidence en mouvement". Il se rendit vite compte que le mouvement ne provenait ni des courants du fluide ni de son évaporation progressive, mais appartenait à la particule elle-même. Le travail de R. Brown a été la première observation complète d'un phénomène appelé depuis mouvement brownien qui est resté inexplicable jusqu'au début du xx<sup>e</sup> siècle. Les premières modélisations ont été proposées par L. Bachelier dans son travail de thèse [2] et plus particulièrement par A. Einstein dans son célèbre document en 1905 [3]. Le mouvement brownien est la description la plus élémentaire de la dynamique d'une particule, du prix, etc. sous l'influence du bruit extérieur.

## 7.2 Surface de mer un ensemble de grains de pollen ?

Dans la logique des simulations réalisées, au chapitre 6, du champ électromagnétique diffusé par des vagues en mouvement et pour lesquelles la description temps-fréquence du signal reçu pouvait s'expliquer en grande partie par des points de réflexion spéculaire, il est envisageable de considérer le champ électromagnétique diffusé comme la somme des contributions d'un grand nombre de diffuseurs discrets, nos grains de pollen. Cette somme de contributions aléatoires est le clutter de mer et ses variations, pour un nombre de diffuseurs donné, est le speckle (parfois appelé chatolement).

### 7.2.1 Somme de diffuseurs aléatoires

Considérons à l'instant  $t$ , que la surface de mer peut se résumer à la présence de  $N_t$  diffuseurs. La contribution électromagnétique de l'ensemble de ces diffuseurs qui peut être vue comme la réflectivité  $\Psi_t$  de la surface de mer soumise à une onde incidente, peut s'écrire :

$$\Psi_t = \sum_{n=1}^{N_t} a_t^{(n)} e^{i\phi_t^{(n)}}. \quad (7.1)$$

où  $a_t^{(n)}$  et  $\phi_t^{(n)}$  sont respectivement l'amplitude et la phase associées au  $n$ -ième diffuseur. Il est intuitif de penser que, à un temps  $t$  donné, les amplitudes  $a_t^{(n)}$  et  $\phi_t^{(n)}$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Quand le nombre moyen de diffuseurs  $\bar{N}$  devient grand ( $\bar{N} \rightarrow +\infty$ ), il est intéressant de normaliser la réflectivité  $\Psi_t$  :

$$\Psi_t = \lim_{\bar{N} \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N_t} \frac{a_t^{(n)}}{\bar{N}^{1/2}} e^{i\phi_t^{(n)}}. \quad (7.2)$$

En identifiant la partie imaginaire et réelle de chaque contribution élémentaire, nous pouvons poser  $a_t^{(n)} e^{i\phi_t^{(n)}} = Z_t^{(n)} + iY_t^{(n)}$ . De même, la réflectivité globale  $\Psi_t$  étant une valeur complexe, elle peut s'écrire soit au travers de sa partie réelle et imaginaire soit au travers de son amplitude et phase :

$$\Psi_t = Z_t + iY_t = A_t e^{i\phi_t} \quad (7.3)$$

Bien sûr, nous avons que  $Z_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_t^{(n)}$  et  $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_t^{(n)}$ . En considérant un très grand nombre de diffuseurs et en appliquant le théorème centrale limite, nous obtenons que  $Z_t$  et  $Y_t$  sont des variables aléatoires gaussiennes.  $(Z_t, Y_t)$  forme même un couple gaussien.

Si la hauteur des vagues de la mer n'est trop faible par rapport à la longueur d'onde électromagnétique, on peut admettre que  $\phi_t$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  et

donc sa densité de probabilité est  $p(\phi_t) = 1/2\pi$ . On admet généralement aussi que les variables  $A_t$  et  $\phi_t$  sont indépendantes  $p(A_t, \phi_t) = p(A_t)p(\phi_t)$ . Ces hypothèses autorisent le calcul de l'espérance  $\mathbb{E}[Z_t^{(n)}] = \langle Z_t \rangle = \langle A_t \cos \phi_t \rangle = \langle A_t \rangle \langle \cos \phi_t \rangle = 0$ . On a de même que  $\langle Z_t \rangle = 0$  et que  $\langle Z_t Y_t \rangle = 0$ , donc  $Z_t$  et  $Y_t$  sont indépendants. Par changement de variable entre  $(Z_t, Y_t)$  et  $(A_t, \phi_t)$ , cela nous conduit à la l'expression de la densité de probabilité de l'amplitude, dite Loi de Rayleigh [4] :

$$p(A_t = z_t) = \frac{z}{\langle a^2 \rangle} e^{-\frac{z}{\langle a^2 \rangle}} \quad (7.4)$$

où  $\langle a^2 \rangle = \mathbb{E}[a_t^{(n)2}]$  est la variance de l'amplitude.

Ce modèle reste un peu simpliste et très souvent, on ajoute le fait que le nombre  $N_t$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :

$$p(N_t = N) = \binom{N + \alpha - 1}{N} \frac{(\langle N \rangle / \alpha)^N}{(1 + \langle N \rangle / \alpha)^{N + \alpha}}, \quad (7.5)$$

avec  $\langle N \rangle = \mathbb{E}[N_t]$ . On peut alors montrer que la densité de probabilité de l'amplitude suit une loi de distribution-K [5] :

$$p(z_t = z) = \frac{2z^{\frac{\alpha-1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{\alpha}{\langle a \rangle^2} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\alpha-1} \left( 2\sqrt{\frac{\alpha z}{\langle a \rangle^2}} \right), \quad (7.6)$$

où  $K$  est la fonction de Bessel du second ordre. La distribution-K revêt une importance considérable pour les applications en télédétection et en imagerie radar des environnements marins, voir figure 7.1. Par ailleurs, la recherche et le développement dans l'identification des lois statistiques avec les mesures expérimentales ou même l'amélioration des modèles statistique fait toujours actuellement l'objet d'une activité importante [6].

### 7.2.2 Diffuseurs en mouvement (Modèle de Field)

Avec une approche de mathématiques appliquées, T. R. Field [7] a cherché a construire un nouveau modèle qui puisse prendre en compte explicitement le mouvement des diffuseurs. Plus précisément, ce modèle devait s'appuyer sur le formalisme des Équations Différentielles Stochastiques EDS :

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (7.7)$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien. On appelle  $\mu$  la *dérive* et  $\sigma$  la *volatilité*. Toutes ces notions découlent directement de la théorie du calcul stochastique [8, 9] et en particulier du calcul stochastique de Itô. Cependant, on peut se faire une idée intuitive de ces notions en considérant la résolution d'une EDS par le schéma d'Euler-Maruyama, qui est l'équivalent d'un schéma d'Euler classique pour une équation différentielle ordinaire. Soit  $[0, T]$  un intervalle et  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$  une subdivision de  $[0, T]$ . Le schéma d'Euler-Maruyama s'écrit :

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \mu(X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) + \sigma(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \quad (7.8)$$

Par définition du mouvement brownien,  $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  est une variable aléatoire gaussienne de variance  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ .

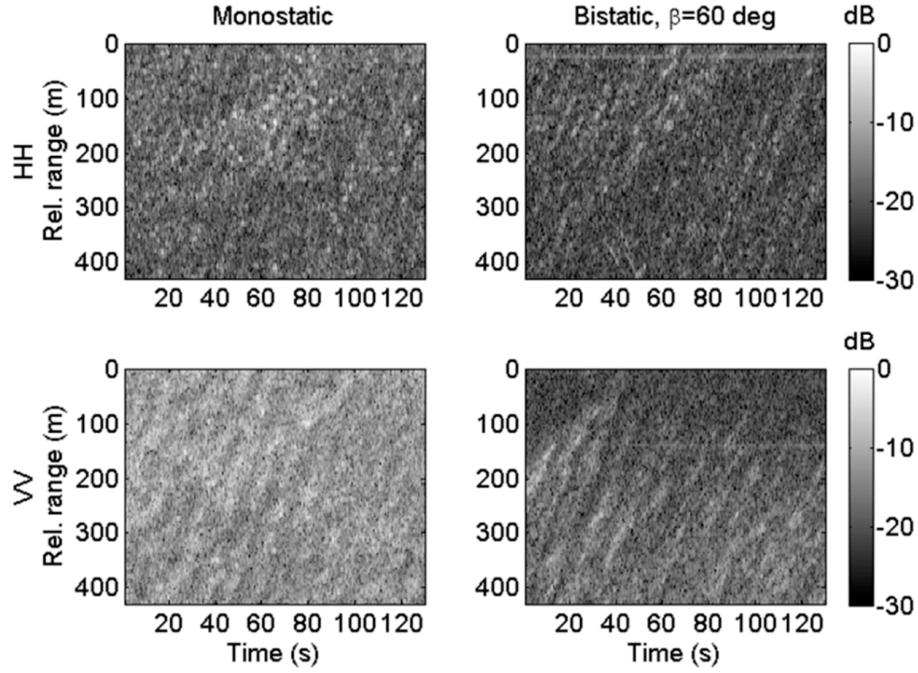


Figure 7.1 – Imagerie en bande S (NetRAD) : en configuration monostatique et bistatique  $60^\circ$  pour des polarisations HH (haut) et VV (bas), [6].

T. R. Field considère que le nombre de diffuseur  $N_t$  varie dans le temps  $t$ , comme dans les simulations vues au chapitre 6. Pour cela, il introduit un modèle aléatoire dynamique de population dit Birth-Death-Immigration d'espérance  $\bar{N}$ . La réflectivité complexe au temps  $t$  correspond alors au résultat d'une marche aléatoire de la forme :

$$\Psi_t^{(\bar{N})} = \sum_{n=1}^{N_t} \frac{a}{\bar{N}^{1/2}} e^{i\phi_t^{(n)}} = \left(\frac{N_t}{\bar{N}}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{N_t} \frac{a}{N_t^{1/2}} e^{i\phi_t^{(n)}}. \quad (7.9)$$

Dans l'équation (7.9), l'amplitude  $a$  des diffuseurs est supposée constante. Les phases  $\phi_t^{(n)}$  des diffuseurs sont indépendantes pour différents  $n$ , et elles suivent les EDS :

$$\begin{cases} d\phi_t^{(n)} = \mathcal{B}^{1/2} dW_t^{(n)} \\ \phi_0^{(n)} = \Delta^{(n)}, \end{cases} \quad (7.10)$$

où  $\forall n$ ,  $\Delta^{(n)}$  est uniformément distribuée sur  $[0, 2\pi[$  et où  $\mathcal{B}$  est une constante positive. En prenant  $a = 1$  (normalisation) et dans la limite d'un nombre de diffuseurs infini ( $\bar{N} \rightarrow +\infty$ ), on obtient :

$$\Psi_t = \lim_{\bar{N} \rightarrow +\infty} \left(\frac{N_t}{\bar{N}}\right)^{1/2} \lim_{\bar{N} \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N_t} \frac{1}{N_t^{1/2}} e^{i\phi_t^{(n)}}. \quad (7.11)$$

Dans le modèle de Field, le clutter de mer est donc représenté par le produit :

$$\Psi_t = x_t^{1/2} \gamma_t, \quad (7.12)$$

où  $x_t = \lim_{\bar{N} \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{\bar{N}}$  est la Surface Equivalente Radar (SER) de la surface de la mer, et où  $\gamma_t = \gamma_t^{(R)} + i\gamma_t^{(I)} = \lim_{\bar{N} \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N_t} \frac{1}{N_t^{1/2}} e^{i\phi_t^{(n)}}$  est le speckle. La SER est proportionnelle au nombre de diffuseurs contribuant au clutter et évolue lentement (on parle parfois de texture). Le speckle, en l'absence de fluctuations de population, correspond à la décohérence de phase des diffuseurs liée à leurs mouvements. Il évolue beaucoup plus vite.

Dans le modèle de Field,  $x_t$  et  $\gamma_t$  sont solutions des EDS [7] :

$$\begin{cases} dx_t = \mathcal{A}(1 - x_t)dt + (2\frac{\mathcal{A}}{\alpha}x_t)^{\frac{1}{2}} dW_t^{(x)} \\ d\gamma_t^{(R)} = -\frac{1}{2}\mathcal{B}\gamma_t^{(R)}dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}dW_t^{(R)} \\ d\gamma_t^{(I)} = -\frac{1}{2}\mathcal{B}\gamma_t^{(I)}dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{B}^{\frac{1}{2}}dW_t^{(I)}, \end{cases} \quad (7.13)$$

où  $W_t^{(x)}$ ,  $W_t^{(R)}$  et  $W_t^{(I)}$  sont des mouvements browniens indépendants. Par rapport à [7], nous avons préféré écrire deux EDS pour les parties réelle et imaginaire du speckle,  $\gamma_t^{(R)}$  et  $\gamma_t^{(I)}$ , plutôt qu'une EDS complexe. Ces deux processus aléatoires sont solutions d'EDS qui ont la même forme, mais qui sont supposées indépendantes par indépendance des mouvements browniens. Le modèle de Field est paramétrisé par trois paramètres constants :  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\alpha$ .  $\mathcal{A}$  (Hz) est l'inverse du temps de corrélation de  $x_t$ , tandis que  $\mathcal{B}$  est l'inverse du temps de corrélation de  $\gamma_t$ .

Après avoir réalisé une pré-étude [10] et convaincu de la pertinence de ces modèles pour la télédétection en environnement maritime, j'ai lancé une thèse menée par C. Roussel et dirigée par A. Baussard.

## 7.3 Travaux de recherche

L'exploitation d'un modèle stochastique, de plus non-linéaire, ne peut pas se faire sans une certaine réflexion au préalable. Dans le cas du modèle de Field, il a été nécessaire d'approfondir plusieurs points importants. Ces points ont constitué la problématique de la thèse menée par C. Roussel.

### 7.3.1 Inférence du clutter de mer

Une mesure du clutter de mer réalisée par un observateur identique mais à différents instants correspond à l'évolution dans le temps d'un processus stochastique décrit par le modèle de T.R. Field. Lorsque l'observateur se déplace, les différentes positions sont atteintes à des temps différents. Or pour comparer les mesures dans ce dernier cas, il aurait été intéressant que toutes les mesures soient réalisées à un même instant. Il est bien sûr impossible de remonter dans le temps car le clutter est un processus stochastique. En revanche, il est possible d'estimer la mesure au temps  $t_1$  sur le temps  $t_2$  grâce à la probabilité de transition. On parle ainsi de relation d'inférence, c'est à dire :

$$\tilde{X}_{t_1}^{(u_1)}, \tilde{X}_{t_2}^{(u_2)} \rightarrow p\left(X_{t_2}^{(u_1)} = x \mid X_{t_1}^{(u_1)} = \tilde{X}_{t_1}^{(u_1)}\right), \tilde{X}_{t_2}^{(u_2)}. \quad (7.14)$$

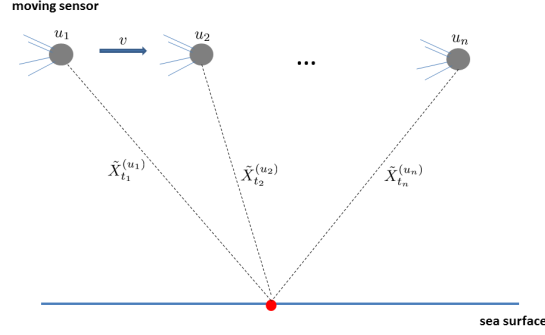


Figure 7.2 – Capteur mobile mesurant le clutter de mer  $X_t^{(u)}$  aux positions  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et temps  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .  $\tilde{X}_t^{(u)} = X_t^{(u)}(\omega)$  est une réalisation du processus aléatoire, [11].

Pour estimer cette loi d'inférence, deux approches sont possibles. La première, par une méthode de type Monté-Carlo, consiste à simuler un grand nombre de réalisations de processus (trajectoires) puis d'en réaliser une analyse statistique. Ces simulations sont obtenues en appliquant des schémas de résolution numérique des EDS, comme la méthode d'Euler-Maruyama par exemple. Pour la seconde, il faut préciser que la théorie des processus stochastiques montre qu'il est possible de retrouver cette loi d'inférence en résolvant une équation différentielle dite de Fokker-Planck.

De nombreuses simulations numériques ont été réalisées, voir figure 7.3, et les équations de Fokker-Planck associées respectivement à  $x_t$  et  $\gamma_t^{(R)}$  ont été résolues analytiquement (l'équation de Fokker-Planck de  $\gamma_t^{(I)}$  est identique à celle de  $\gamma_t^{(R)}$ ). Pour  $x_t$ , il a été prouvé que les probabilités de transition vers le futur sont :

$$p(x_t = x | x_0 = y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha L_n^{\alpha-1}(\alpha y) n!}{\Gamma(n + \alpha)} e^{-\alpha n t} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{\alpha-1} L_n^{\alpha-1}(\alpha x), \quad (7.15)$$

où les  $L_n^{\alpha-1}$  sont les polynômes de Laguerre et  $\Gamma$  la fonction gamma. Pour  $\gamma_t^{(R)}$ , nous avons prouvé que les probabilités de transitions vers le futur sont gaussiennes :

$$p\left(\gamma_t^{(R)} = x | \gamma_0^{(R)} = y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - m_y(t))^2}{v(t)}}, \quad (7.16)$$

de moyenne :

$$m_y(t) = ye^{-\mathcal{B}t/2}, \quad (7.17)$$

et de variance :

$$v(t) = \frac{1 - e^{-\mathcal{B}t}}{2}. \quad (7.18)$$

Par ailleurs, il a été montré que les deux approches donnaient des résultats cohérents, comme on peut le constater à la figure 7.3.

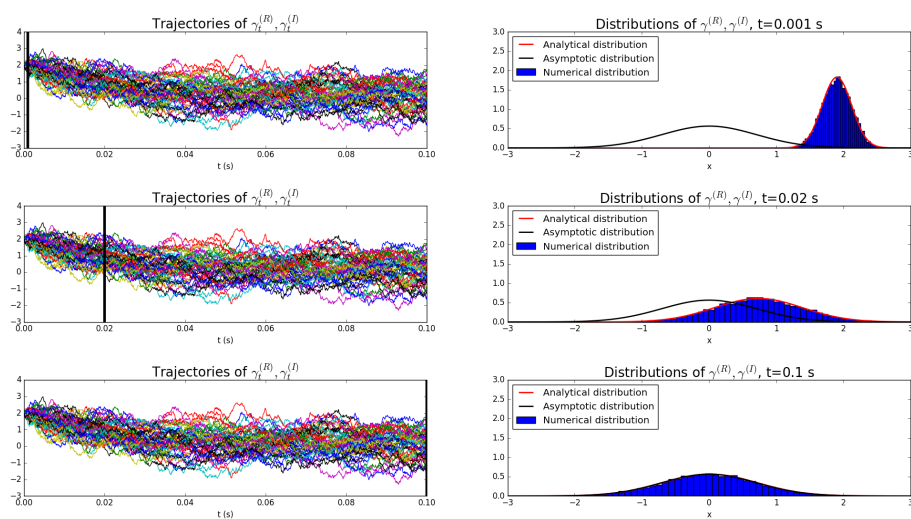


Figure 7.3 – Comparaison entre les probabilités de transition analytique de  $\gamma_t^{(R)}$  (équation (7.16)), et les probabilités de transitions numériques obtenues grâce au schéma d'Euler-Maruyama. 10000 trajectoires ont été simulées avec  $\mathcal{B} = 100$  Hz et  $y = 2$ , [11].



### 7.3.2 Identification des paramètres du modèle

Comme nous l'avons vu, le modèle de Field est paramétré par trois paramètres :  $\mathcal{A}$  et  $\alpha$  pour la SER  $x_t$ , et  $\mathcal{B}$  pour le speckle  $\gamma_t$ . La problématique de l'estimation des paramètres dans un modèle stochastique non-linéaire est toujours un point très délicat. Dans notre cas, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres à partir de séries temporelles de  $x_t$ ,  $z_t = |\Psi_t|^2$  et  $\gamma_t$ . Comme montré ci-dessous, l'estimation de  $\alpha$  se fait sous l'hypothèse que le clutter de mer est ergodique, tandis que celle de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  se fait par maximum de vraisemblance.

#### Estimation de $\alpha$

Il est possible de montrer que la distribution stationnaire de  $x_t$  est :

$$p(x_t = x) = \frac{\alpha^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (7.19)$$

et que  $\text{var}(x_t) = 1/\alpha$  pour tout  $t$ . On suppose observer une série temporelle  $x_i$  aux temps  $t_i = i\Delta t$ , avec  $i$  allant de 0 à  $n$ . En supposant que le processus aléatoire  $x_t$  est ergodique, on obtient l'estimateur suivant pour  $\alpha$  :

$$\tilde{\alpha}_x = \left[ \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - 1)^2 \Delta t \right]^{-1}. \quad (7.20)$$

On propose un autre estimateur de  $\alpha$  à partir d'une série temporelle de l'intensité  $z_t$ . Pour cela, on note que dans le modèle de Field, la distribution stationnaire de  $z_t$  est :

$$p(z_t = x) = \frac{2b^{(\nu+1)/2} x^{(\nu-1)/2}}{\Gamma(\nu)} K_{\nu-1}(2\sqrt{bx}). \quad (7.21)$$

En utilisant les relations entre les moments d'une variable aléatoire  $K$ -distribué (voir [5, p110]), on obtient l'estimateur :

$$\tilde{\alpha}_z = \frac{2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} z_i \Delta t \right)^2}{\sum_{i=0}^{n-1} (z_i - 1)^2 \Delta t - \left( \sum_{i=0}^{n-1} z_i \Delta t \right)^2}. \quad (7.22)$$

Ces deux estimateurs  $\tilde{\alpha}_x$  et  $\tilde{\alpha}_z$  s'avèrera très utile pour la suite.

#### Estimation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

Pour estimer  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , nous utilisons le principe du maximum de vraisemblance, qui consiste à maximiser la vraisemblance d'une série temporelle par rapport au paramètre recherché. Un processus aléatoire qui est solution d'une EDS (7.7) est un processus de Markov. Cette propriété peut être utilisée pour montrer que la vraisemblance (c'est à dire la distribution jointe) d'une série temporelle  $\tilde{X}_{t_i}$  pour  $i$  allant de 0 à  $n$  s'écrit :

$$\mathcal{L} = p(X_{t_0} = \tilde{X}_0) \prod_{i=1}^N p(X_{t_i} = \tilde{X}_i | X_{t_{i-1}} = \tilde{X}_{i-1}). \quad (7.23)$$

Le premier terme  $p(X_{t_0} = \tilde{X}_0)$  est la distribution stationnaire pour la première valeur observée, tandis que les autres correspondent aux différentes transitions. La vraisemblance est donc connue pour peu que la distribution stationnaire et les probabilités de transition le soient. Or, les probabilités de transition de  $x_t$  et  $\gamma_t^{(R)}$  ont été calculées. De plus, la distribution stationnaire de  $x_t$  est donnée par l'équation (7.19), et celle de  $\gamma_t^{(R)}$  (ou  $\gamma_t^{(I)}$ ) est simplement :

$$p\left(\gamma_t^{(R)} = x\right) = p\left(\gamma_t^{(I)} = x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (7.24)$$

Pour estimer  $\mathcal{A}$ , on suppose  $\alpha$  connu et on calcule la vraisemblance de la série temporelle  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . C'est une fonction de  $\mathcal{A}$  qu'on maximise numériquement par rapport à  $\mathcal{A}$  lorsque les probabilités de transition exactes (équation (7.15)) sont utilisées. En utilisant l'approximation du schéma d'Euler-Maruyama, on peut maximiser la vraisemblance analytiquement. Le paramètre estimé est alors solution du polynôme :

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\alpha(\tilde{x}_{i-1} - 1)^2}{4\tilde{x}_{i-1}} \mathcal{A}^2 - \frac{n}{2} \mathcal{A} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})^2}{4\tilde{x}_{i-1} \Delta t} = 0. \quad (7.25)$$

Nous avons testé une autre approximation plus élaborée que le schéma d'Euler-Maruyama, que nous appelons approximation de Nowman (voir [12]) mais qui s'est révélée sans grand intérêt pour  $x_t$ . En effet, ses performances sont similaires à celles de l'approximation d'Euler-Maruyama mais sa complexité est supérieure.

Pour estimer  $\mathcal{B}$ , nous pouvons également utiliser les probabilités de transition exactes de  $\gamma_t^{(R)}$  (équation (7.16)). Dans ce cas ci, elles sont strictement égales à l'approximation de Nowman, et la vraisemblance peut être maximisée analytiquement par rapport à  $\mathcal{B}$ . Le  $\mathcal{B}$  estimé est solution du polynôme suivant :

$$\frac{n}{2} Y^3 - \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{i-1}^{(R)} \tilde{\gamma}_i^{(R)} Y^2 + \left( -\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n \left( \tilde{\gamma}_i^{(R)2} + \tilde{\gamma}_{i-1}^{(R)2} \right) \right) Y - \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{i-1}^{(R)} \tilde{\gamma}_i^{(R)} = 0, \quad (7.26)$$

tandis qu'en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama, il est solution de :

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\gamma}_{i-1}^{(R)2} \Delta t}{4} \mathcal{B}^2 - \frac{n}{2} \mathcal{B} + \sum_{i=1}^n \frac{\left( \tilde{\gamma}_i^{(R)} - \tilde{\gamma}_{i-1}^{(R)} \right)^2}{\Delta t} = 0. \quad (7.27)$$

### 7.3.3 Modèle de Field et présence d'une cible

Un point important dans l'ensemble de ces travaux de recherche est qu'il est possible d'inclure la présence d'une cible dans le modèle de Field. Deux modèles ont été proposés dans [7]. Dans le modèle Homodynamed K (HK), la réflectivité de la cible est une constante complexe ajoutée au clutter de mer. Si on dénote  $\Psi_t^{(HK)}$  la réflectivité totale, on a :

$$\Psi_t^{(HK)} = \Psi_c^{(R)} + i\Psi_c^{(I)} + x_t^{1/2} \gamma_t, \quad (7.28)$$

où  $\Psi_c = \Psi_c^{(R)} + i\Psi_c^{(I)}$  est la réflectivité de la cible. Le modèle Generalized K (GK), quant à lui, fait varier la réflectivité de la cible avec la SER  $x_t$  (see [7] p 71) :

$$\Psi_t^{(GK)} = \left( \Psi_c^{(R)} + i\Psi_c^{(I)} \right) \eta x_t + x_t^{1/2} \gamma_t, \quad (7.29)$$

où  $\eta$  est un facteur de couplage.

Nous avons montré dans les deux cas (HK et GK) qu'il était possible de réécrire les équations (7.13) du modèle de Field en prenant en compte la cible, et qu'on pouvait estimer la constante de cible  $\Psi_c$  par maximum de vraisemblance.

Dans le cas HK, en notant  $\Psi_t^{(HK)} = R_t + iI_t$ , nous avons montré en utilisant le calcul d'Itô que le processus multidimensionnel  $[x_t \ R_t \ I_t]^\top$  était solution de l'EDS :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_t \\ dR_t \\ dI_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}(1-x_t) \\ -\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} (R_t - \Psi_c^{(R)}) + \frac{\mathcal{A}(R_t - \Psi_c^{(R)})}{2x_t} (1 - \frac{1}{2\alpha}) \\ -\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} (I_t - \Psi_c^{(I)}) + \frac{\mathcal{A}(I_t - \Psi_c^{(I)})}{2x_t} (1 - \frac{1}{2\alpha}) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} (\frac{2\mathcal{A}x_t}{\alpha})^{1/2} & 0 & 0 \\ \frac{(R_t - \Psi_c^{(R)})}{x_t^{1/2}} (\frac{\mathcal{A}}{2\alpha})^{1/2} & (\frac{\mathcal{B}x_t}{2})^{1/2} & 0 \\ \frac{(I_t - \Psi_c^{(I)})}{x_t^{1/2}} (\frac{\mathcal{A}}{2\alpha})^{1/2} & 0 & (\frac{\mathcal{B}x_t}{2})^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_t^{(x)} \\ dW_t^{(R)} \\ dW_t^{(I)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Dans le cas GK, en notant de nouveau  $\Psi_t^{(GK)} = R_t + iI_t$ , nous avons montré que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_t \\ dR_t \\ dI_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}(1-x_t) \\ \eta\Psi_c^{(R)}\mathcal{A}(1-x_t) + (R_t - \Psi_c^{(R)})\eta x_t \left(-\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} + \frac{\mathcal{A}}{2x_t} (1 - \frac{1}{2\alpha})\right) \\ \eta\Psi_c^{(I)}\mathcal{A}(1-x_t) + (I_t - \Psi_c^{(I)})\eta x_t \left(-\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{2} + \frac{\mathcal{A}}{2x_t} (1 - \frac{1}{2\alpha})\right) \end{bmatrix} dt \\ &+ \begin{bmatrix} (\frac{2\mathcal{A}x_t}{\alpha})^{1/2} & 0 & 0 \\ \frac{R_t - \Psi_c^{(R)}\eta x_t}{x_t^{1/2}} (\frac{\mathcal{A}}{2\alpha})^{1/2} + \eta\Psi_c^{(R)} (\frac{2\mathcal{A}x_t}{\alpha})^{1/2} & (\frac{\mathcal{B}x_t}{2})^{1/2} & 0 \\ \frac{I_t - \Psi_c^{(I)}\eta x_t}{x_t^{1/2}} (\frac{\mathcal{A}}{2\alpha})^{1/2} + \eta\Psi_c^{(I)} (\frac{2\mathcal{A}x_t}{\alpha})^{1/2} & 0 & (\frac{\mathcal{B}x_t}{2})^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_t^{(x)} \\ dW_t^{(R)} \\ dW_t^{(I)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Cette nouvelle expression mathématique des processus stochastiques en jeu montre trois processus  $x_t$ ,  $R_t$  et  $I_t$  qui ne sont plus indépendants. En réalité, cela peut s'interpréter comme un processus global de dimension 3 avec unemétrique qui n'est plus canonique, voir à titre d'illustration la figure 7.4. C'est à dire que dans le cas de la présence de cible, le processus stochastique global n'est plus défini dans un espace euclidien standard mais dans un espace de Riemann [13-15]. Cela implique une géométrie directement liée à la présence et à la nature de la cible. Ce point de vue de géométrie différentielle n'a pas été développé au cours de cette thèse, mais il mériterait, à mon sens, une étude plus approfondie.

## 7.4 Non-observabilité de $x_t$

Un dernier point qui a été étudié concerne la non-observabilité directe de  $x_t$ . En effet, nous avons présenté le modèle de Field dans la section et expliqué que la réflectivité complexe de la surface de la mer est décrite grâce aux trois processus  $x_t$ ,  $\gamma_t^{(R)}$  et  $\gamma_t^{(I)}$  via l'équation :

$$\Psi_t = x_t^{1/2} \left( \gamma_t^{(R)} + i\gamma_t^{(I)} \right). \quad (7.32)$$

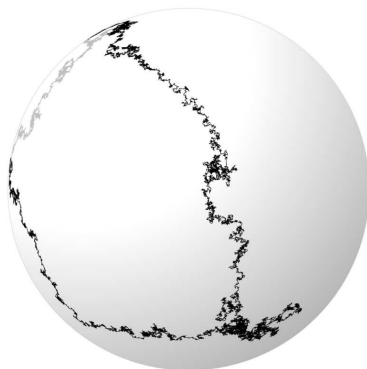


Figure 7.4 – Exemple d'un processus de dimension 2 sur une variété différentielle (sphère).

Or, nous avons supposé que les séries temporelles de  $x_t$ ,  $\gamma_t^{(R)}$  et  $\gamma_t^{(I)}$  étaient observées. En réalité, un radar cohérent ne peut pas mesurer ces processus, mais uniquement  $\Psi_t$ , et donc  $R_t = x_t^{1/2} \gamma_t^{(R)}$  et  $I_t = x_t^{1/2} \gamma_t^{(I)}$  (parties réelles et imaginaires). Afin de répondre à ce problème, il a été proposé des estimateurs de la SER  $x_t$  basés sur  $\Psi_t$  en utilisant le fait que  $x_t$  évolue lentement par rapport à  $\gamma_t$  ( $\mathcal{A} \ll \mathcal{B}$ ). Puis, il a été ensuite proposé une séquence d'estimateurs pour la SER, le speckle, et les paramètres du clutter de mer que nous avons analysée numériquement.

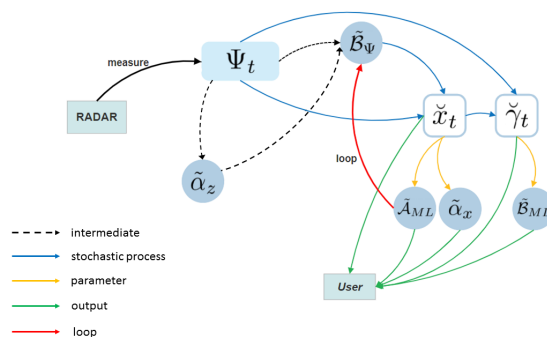


Figure 7.5 – Représentation de l'ensemble des estimateurs mis en place et de l'ordre dans lequel ils doivent être appliqués, [11].

Pour une description plus complète, l'ensemble de ces travaux ont été publiés dans plusieurs conférences [16-18] et articles de revue [19-21].

## 7.5 Pour aller plus loin

Les satellites optiques à très haute résolution offrent une vue unique de nos océans, mers et côtes. Ils constituent un outil indispensable pour gérer les actions et les événements qui ont une incidence sur la sûreté, la sécurité et la durabilité maritimes. Cependant, les systèmes satellitaires optiques souffrent du défaut majeur qu'il leur est impossible de réaliser des images quand la météo ne le permet pas, classiquement lors d'épais couverts nuageux. De même, sur une période nocturne, beaucoup de ces systèmes ne sont pas non plus opérationnel. Une solution pour répondre à ces problématiques est d'utiliser des satellites d'observation radar, c'est à dire émettant des signaux micro-onde qui traversent sans problème les couches nuageuses et s'affranchissent, de par leur caractère actif, de l'absence de source lumineuse. Toutefois, à taille d'antenne fixée, un faisceau micro-onde aura un lobe d'émission considérablement plus large qu'un système optique. Cela devrait donc engendrer a priori une imagerie avec une résolution très médiocre. Pour pallier cette difficulté, l'approche classique consiste à appliquer la technologie du Radar à Ouverture Synthétique (ROS) ou Synthetic Aperture Radar (SAR) en anglais [5]. La résolution d'une antenne est inversement proportionnelle à sa taille. Pour obtenir une résolution de l'imagerie micro-onde suffisante, il faudrait une taille d'antenne très importante, nullement compatible avec les contraintes des capteurs aéroportés ou spatiaux. Les méthode SAR cherche à résoudre ce problème en tirant parti du mouvement des capteurs, voir figure 7.6. Étant donné que la fauchée de l'antenne est grande, les mêmes objets sont éclairés plusieurs fois pendant le mouvement du capteur, ce qui signifie qu'il est possible d'ajouter de manière cohérente la rétrodiffusion dans le temps pour reconstituer une mesure réalisée par une immense antenne virtuelle.

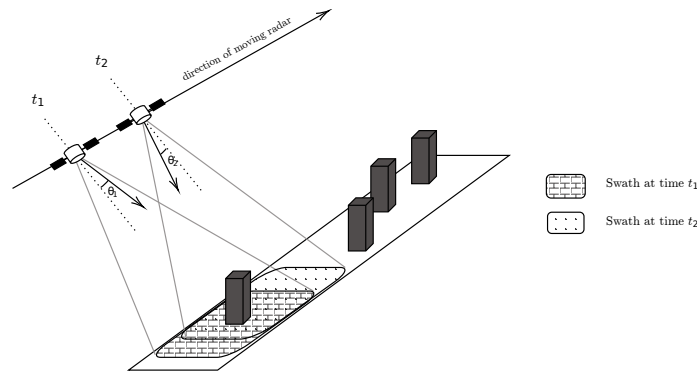


Figure 7.6 – Principe de la méthode d'imagerie SAR.

La résolution de l'imagerie SAR apparaît a priori uniquement limitée par la taille de la fauchée et la longueur du temps d'intégration sur les différentes positions prises par le satellite lors de son mouvement. Pour une imagerie terrestre, cela est effectivement globalement le cas. Par contre, concernant l'imagerie de l'océan, il faut tenir compte d'une problématique spécifique : la surface de mer est en mouvement, clutter de mer stochastique. Mesurer à des temps différents génère en réalité un flou sur cette imagerie. L'étude menée dans le cadre de la thèse de C. Roussel pourrait très probablement aider, du moins en partie, à résoudre cette difficulté, notamment en introduisant une modélisation des phénomènes d'inférence. Il est prévu de lancer des études en ce sens très

prochainement.

## 7.6 Conclusion

La vision stochastique de la diffusion électromagnétique par des surfaces de mer en mouvement constitue avec les deux chapitres précédents le troisième volet de mon activité en télédétection des milieux naturels et plus spécifiquement des milieux maritimes. Cette approche m'a obligé à maîtriser de nouveaux outils de modélisation comme le calcul différentiel stochastique. Ces nouveaux outils complètent de façon notable le panel de mes compétences méthodologiques en télédétection et plus généralement en modélisation des ondes électromagnétiques en milieux complexes.

Le travail de recherche mené sur le sujet a été très largement fructueux et a donné lieu à une publication significative, en particulier sur l'identification des paramètres du modèle stochastique non-linéaires à partir des mesures du champ électromagnétique.

Il est aussi à noter que le travail réalisé m'a amené à réfléchir à de nouvelles problématiques, par exemple la présence de cibles déterministes multiples ou encore l'utilisation des méthodes développées pour des applications d'imagerie SAR. Les perspectives d'études de nouveaux projets scientifiques dans le domaine sont largement ouvertes.

## Références

1. Brown, R. in *The Miscellaneous Botanical Works of Robert Brown* (éd. Bennett, J. J.) 463-486 (Cambridge University Press, 2015). doi :[10.1017/CB09781107775473.016](https://doi.org/10.1017/CB09781107775473.016).
2. Bachelier, L. Théorie de la spéculation. fr. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **17**, 21-86 (1900).
3. Einstein, A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (réédition de l'article de 1905) (Dover Publications Inc., 1998).
4. Jakeman, E. & Ridley, K. D. *Modeling Fluctuations in Scattered Waves* (CRC Press, 2006).
5. Ward, K., Tough, R. & Watts, S. *Sea Clutter : Scattering, the K Distribution and Radar Performance* 2nd edition. <https://digital-library.theiet.org/content/books/ra/pbra025e> (Institution of Engineering et Technology, 2013).
6. Angelliaume, S., Rosenberg, L. & Ritchie, M. Modeling the Amplitude Distribution of Radar Sea Clutter. *Remote Sensing* **11**. issn : 2072-4292. doi :[10.3390/rs11030319](https://doi.org/10.3390/rs11030319). <https://www.mdpi.com/2072-4292/11/3/319> (2019).
7. Field, T. R. *Electromagnetic Scattering from Random Media* (Oxford University Press, 2009).
8. Gall, J.-F. L. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique* (Springer - SMAI, 2013).
9. Oksendal, B. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications* Fifth Edition (Springer-Verlag, 2000).
10. Coatanhay, A. *Identification of the electromagnetic scattering by dynamic sea surfaces with a stochastic differential equation model* in AES (Malaga, Spain, 26-28 July 2016).

11. Roussel, C. *Stochastic differential equations for the electromagnetic field scattered by the sea surface : applications to remote sensing* thèse de troisième cycle (Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées Bretagne, COMUE Université Bretagne Loire, 2019).
12. Phillips, P. C. B. & Yu, J. in *Handbook of Financial Time Series* (éd. Mikosch, T., Kreiß, J.-P., Davis, R. A. & Andersen, T. G.) 497-530 (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009). isbn : 978-3-540-71297-8. doi :[10.1007/978-3-540-71297-8\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8_22). [https://doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8_22).
13. Hsu, E. P. *Stochastic Analysis On Manifolds* (American Mathematical Society, 2002).
14. Emery, M. *Stochastic Calculus in Manifolds* (Springer-Verlag, 1989).
15. Gliklikh, Y. E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics* (Springer, 2011).
16. Roussel, C., Coatanhay, A. & Baussard, A. *Stochastic differential equations for the electromagnetic field scattered by the sea surface for remote sensing applications* in *SPA* (Gothenburg, Sweden, nov. 2018).
17. Roussel, C., Coatanhay, A. & Baussard, A. *Maximum-likelihood estimation of target parameters in a time-evolving random medium* in *Waves* (Vienna, Austria, 25-30 August 2019).
18. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. *Stochastic dynamics of sea clutter for applications to remote sensing* in *IGARSS* (Yokohama, Japan, 28 July-02 Aug 2019).
19. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. Estimation of the parameters of stochastic differential equations for sea clutter. *IET Radar, Sonar & Navigation* **13**, 497-504 (2019).
20. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. Forward and backward probabilistic inference of the sea clutter. *Waves in Random and Complex Media* **29**, 540-568 (2019).
21. Roussel, C. J., Coatanhay, A. & Baussard, A. Estimation of coherent scattering in dynamic random media. *Waves in Random and Complex Media* **31**, 2301-2326 (2021).

# Ondes, entropie et quantique

---

Dans une problématique de télédétection, on s'intéresse bien sûr à la modélisation de l'interaction des ondes avec l'environnement ou avec la cible d'intérêt. Pourtant, il ne s'agit pas là de la problématique la plus essentielle. En télédétection, on cherche, en effet, avant toute chose, à extraire de l'information pour mieux connaître ce que l'on souhaite observer. Même si elle n'est pas toujours explicitement formulée, la notion d'information constitue, de façon latente, la quantité réellement au cœur du travail de télédétection.

Je rappelle, ici, l'un des points de vue les plus fondamentaux sur la modélisation de l'information qu'est l'entropie de Shannon. Je présente comment cette approche m'a permis en collaboration avec Maciej Pedzisz d'apporter des solutions à l'identification de communications perturbées pour des besoins de guerre électromagnétique.

Dans une seconde partie, j'explique en quoi la modélisation de l'information permet également d'aborder de nouvelles problématiques induites par le développement de technologies quantiques récentes. Je termine en évoquant un travail de thèse actuellement mené dont j'assure l'encadrement sous la direction d'Ali Khenchaf, et qui traite du radar à illumination quantique.

8.1	Paradoxe . . . . .	199
8.2	Onde et information . . . . .	200
8.2.1	Information et entropie . . . . .	200
8.2.2	Application en guerre électronique . . . . .	203
8.3	Information et mécanique quantique . . . . .	206
8.3.1	Quelques notions . . . . .	207
8.3.2	Radar quantique . . . . .	212
8.3.3	Pour aller plus loin . . . . .	215
8.4	Conclusion . . . . .	216

## 8.1 Paradoxe

En 1944, l'écrivain argentin Jorge Luis Borges publie un recueil "Fiction" [1], contenant l'une de ses plus célèbres nouvelles "La bibliothèque de Babel". L'histoire rassemble un certain nombre d'idées très borgésiennes, telles que l'infini et la nature paradoxale du monde. Le narrateur de Borges décrit l'univers comme une bibliothèque vaste et pratiquement infinie, comprenant un grand nombre de pièces hexagonales, avec divers escaliers flottants et de longues galeries, contenant un



grand nombre de livres. Ces livres comprennent toutes les permutations ou combinaisons possibles de 25 symboles : 22 lettres, la virgule et le point, et l'espace. Tous les livres font exactement 410 pages, et chacun est différent de tous les autres.

Le narrateur nous dit que la bibliothèque existe ab aeterno, c'est-à-dire depuis les premiers temps de l'Antiquité, et qu'elle n'aurait pu être créée que par un Dieu. Bien que le contenu de beaucoup de livres se soit avéré indéchiffrable pendant un long moment, les gens ont été en mesure de décoder les langues utilisées dans certains des livres.

Néanmoins, la bibliothèque n'est pas techniquement « infinie », parce que le nombre de livres a une fin. Bien que le nombre de combinaisons différentes de 25 caractères différents, plus de 410 pages de texte, soit monumentalement vaste, il n'est pas infini : juste un très grand nombre.

Parmi tous ces livres, quelque part, il y a les "Justifications" : des livres qui excusent chaque péché que l'homme a commis, et qui offrent des clés pour son avenir. Cependant, on dit que les chances de trouver les justifications pertinentes sont nulles, compte tenu de l'ampleur de la bibliothèque. Ainsi, la plupart des livres sont inutiles parce qu'ils sont incompréhensibles pour les bibliothécaires qui les étudient.

Pour faciliter cette tâche, certains bibliothécaires ont tenté de supprimer les livres qu'ils considéraient comme inutiles ou non pertinents. Mais c'était futile, parce qu'il y avait toujours des centaines de milliers de copies presque identiques d'un livre (différent du livre jeté par un seul caractère ici ou là), et la bibliothèque était si vaste que toute tentative humaine de réduire ce nombre ne produirait pratiquement aucun effet sur la vaste taille de la bibliothèque. Le narrateur conclut en affirmant que la Bibliothèque de Babel est infinie et cyclique.

Pour écrire cette nouvelle, Jorge Luis Borges s'est sans doute inspiré de l'idée d'une bibliothèque infinie, imaginée pour la première fois par le mathématicien et écrivain allemand Kurd Lasswitz, dans sa nouvelle « La bibliothèque universelle » [2], parue en 1904. Ces deux nouvelles nous conduisent au paradoxe d'une information infinie ou quasi-infinie disponible qui contient en son sein la perte de sens et donc le manque d'information. A l'époque d'un Internet omniscient, il est sans doute utile de se demander ce qu'est l'information.

## 8.2 Onde et information

Modéliser le champ électromagnétique ou acoustique interagissant avec une cible ou avec un environnement complexe n'est probablement pas en soi l'objectif fondamental de mon travail de recherche. L'onde est généralement vue dans mes activités comme le support d'un système d'observation ou de télédétection. Donc la question essentielle est davantage de déterminer quelle information sur l'environnement ou sur la cible peut être obtenue en utilisant une onde, ou comment le formalisme de modélisation électromagnétique ou acoustique permet de mettre en évidence l'information susceptible d'être recouvrée. En réalité, la problématique de l'information constitue de façon latente le sujet fondamental de mon travail de recherche.

### 8.2.1 Information et entropie

Historiquement, de nombreuses notions d'entropie ont été proposées [3]. La première utilisation du mot entropie remonte à Clausius [4], qui a inventé ce terme du grec "tropos", signifiant transformation, et du préfixe "en-" pour rappeler son inséparable relation, dans son travail, à la notion d'énergie. En adoptant une description statistique des configurations microscopiques des systèmes

à corps multiples, L. Boltzmann réussit, dès 1866 [5-7], à formaliser l'entropie par l'expression :

$$S_G = -k_B \sum p_i \ln p_i \quad (8.1)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $p_i$  la probabilité associée à l'état  $i$ . Les probabilités étant inférieures ou égales à 1, le signe  $-$  assure que cette quantité est positive. Lorsque les états sont équiprobables, l'entropie s'écrit  $S_G = k_B \log W$  où  $W$  est le nombre d'états, forme très utilisée dans la théorie des gaz de Boltzmann [6, 7]. Il est à noter que L. Boltzmann a utilisé l'expression  $-k_B \sum \rho_i \ln \rho_i$  mais interprétait alors  $\rho$  comme une densité dans l'espace de phase, sans faire référence à la notion de probabilité. Il faut attendre 1878 pour que J. W. Gibbs en donne une interprétation explicitement probabiliste et donc l'expression (8.1) porte le nom d'entropie de Gibbs.

Dans les années 40, C. E. Shannon cherchait à élaborer une théorie pour quantifier la perte d'information lors de la transmission d'un message donné dans un canal de communication [8]. Le point de vue original qu'il adopta, fut d'ignorer la sémantique et de se concentrer sur les contraintes physiques et statistiques limitant la transmission d'un message, indépendamment de sa signification. Paradoxalement, la quantification réalisée par C. E. Shannon ne mesure pas l'information dont dispose un observateur, par exemple des probabilités a priori, mais plutôt son ignorance, plus précisément le nombre moyen d'information binaire minimal (arbre de décision) dont l'observateur aurait besoin pour retrouver un message parmi un flux de messages dans un système de communication. Le contenu informatif des différents messages n'intervient ici absolument pas. C. E. Shannon a établi que cette quantité moyenne minimale  $H(X)$ , pour une variable aléatoire  $X$ , pouvait s'écrire explicitement :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p_i(x_i) \log_2 p_i(x_i) \quad (8.2)$$

où  $p_i(x_i)$  est la probabilité associée à l'état  $x_i$  parmi l'espace des états  $\mathcal{X}$ . D'après la légende, au vu de la ressemblance formelle de cette expression avec les travaux en thermodynamique, J. von Neumann aurait suggéré à C. E. Shannon de l'appeler entropie. Il est possible de généraliser cette expression en considérant non plus un arbre binaire mais un arbre de décision en base  $b$  :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p_i(x_i) \log_b p_i(x_i) \quad (8.3)$$

**Entropie conditionnelle** L'entropie de Shannon s'étend aux variables aléatoires multivariées. Elle implique leur distribution probabiliste conjointe, par exemple pour un couple de variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prenant leurs valeurs dans deux espaces différents (discrets et finis)  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  donnés :

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log_2 p(x, y) \quad (8.4)$$

A partir de cette entropie jointe, on définit l'entropie conditionnelle  $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$ , qui apparaît comme étant la moyenne (sur  $Y$ ) des entropies des distributions de probabilités conditionnelles  $p(X|Y = y)$  (probabilité de  $X$  sachant que  $Y = y$ ) :

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left[ - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log_2 p(x, y) \right] \quad (8.5)$$

**Entropie relative** Lorsque les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont le même espace d'état  $\mathcal{X}$ , avec les distributions respectives  $p_X$  et  $p_Y$ , il est possible de considérer l'entropie relative :

$$H_{rel}(X|Y) = S_{rel}(p_X|p_Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log_2 [p_X(x)/p_Y(x)] \quad (8.6)$$

Il est facile de montrer que  $H_{rel}(X|Y)$  est une quantité négative [9].

**Divergence de Kullback-Leibler** L'opposé de l'entropie relative définit la divergence Kullback-Leibler [10]. Pour deux distributions de probabilité  $p$  et  $q$  sur le même espace  $\mathcal{X}$  :

$$D(p||q) = -S_{rel}(p|q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_2 [p(x)/q(x)] \geq 0 \quad (8.7)$$

Il est à noter que  $D(p||q)$  n'est pas une distance dans la mesure où elle n'est pas symétrique et qu'elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

**Information mutuelle** Le concept d'information mutuelle  $I(X;Y)$  peut aussi être introduite en posant

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (8.8)$$

pour les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Le lien avec l'entropie relative et la divergence de Kullback-Leibler est donné par :

$$I(X;Y) = D(p_{XY}||p_X p_Y) \quad (8.9)$$

où  $p_{XY}$  est la distribution jointe du couple  $(X, Y)$  et où  $p_X$  et  $p_Y$  sont les distributions marginales. L'information mutuelle  $I(X;Y)$  mesure l'ensemble des corrélations entre  $X$  et  $Y$  : elle disparaît si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors qu'elle est égale à  $H(X)$  si  $X = Y$ . La notion peut être étendue à l'information mutuelle conditionnelle (information mutuelle entre  $X$  et  $Y$  sachant  $Z$ ), par la définition suivante :

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X,Y|Z) \quad (8.10)$$

**Géométrie de l'information** Enfin, il peut être intéressant de préciser que la divergence Kullback-Leibler a aussi une signification géométrique, liée à ce que l'on appelle la métrique de l'information de Fisher. Pour une famille de distributions de probabilité  $p(x, a)$  paramétrée par  $a$  ayant  $d$  composantes, la métrique de l'information de Fisher s'écrit : [11] :

$$dp^2(a) = \sum_{i,j} g_{ij}(a) da^i da^j \quad \text{où} \quad g_{ij}(a) = \int \frac{\partial \log_2 p(x, a)}{\partial a_i} \frac{\partial \log_2 p(x, a)}{\partial a_j} p(x, a) dx \quad (8.11)$$

d'où :

$$dp^2(a) = 2D[p(\cdot, a) || p(\cdot, a + da)] \quad (8.12)$$

Cette métrique munit la famille paramétrée d'une structure de variété différentielle Riemannienne de dimension  $d$ . Les paramètres  $a$  correspondent aux coordonnées de cette variété. Travailler au niveau d'un espace de distributions de probabilité permet retrouver une structure continue alors que les caractéristiques sous-jacentes (espace d'état) sont discrètes. Cela rend possible l'utilisation des outils de géométrie différentielle pour l'étude des structures statistiques en tant que structures géométriques.

### 8.2.2 Application en guerre électronique

Les outils de la théorie de l'information sont fréquemment utilisés pour traiter de nombreuses problématiques des sciences de l'ingénieur, comme notamment en télécommunication (évaluation des capacités de canal ou de codage de canal) ou encore dans l'analyse des systèmes complexes [12, 13]. Pour ma part, même si ces concepts m'étaient déjà familier, j'ai réellement commencé à les appliquer dans le cadre de mes activités de recherche sur une problématique de guerre électronique [14].

Lorsque l'on essaie d'intercepter des communications issues d'un système ennemi (satellitaire par exemple), il faut bien sûr chercher à déchiffrer les messages pour en lire le contenu. Néanmoins, avant de se lancer dans le déchiffrement de ce message, la première étape incontournable est d'être en mesure d'enregistrer ce message binaire. Or la communication binaire est transmise au travers de la modulation d'une onde électromagnétique et il est clair que les informations sur la nature de l'onde porteuse et sur le choix de la modulation, dans un contexte inamicale, se sont pas publiques. Par ailleurs, la chaîne de réception ne peut s'envisager sans un niveau de bruit parfois très significatif. Dans ces conditions, démoduler le signal bruité avec tant de paramètres inconnus n'est pas une tâche simple. Beaucoup de travaux ont été réalisés pour identifier, même avec des niveaux bruits forts, la modulation parmi un ensemble fini de modulations possibles, voir figure 8.1, [15]. Toutefois ces approches nécessitent généralement de travailler en bande de base et donc d'avoir une connaissance très précise de la fréquence porteuse. Or déterminer cette fréquence avec suffisamment de précision avec peu d'information a priori et avec un fort bruit constitue un point scientifique délicat.

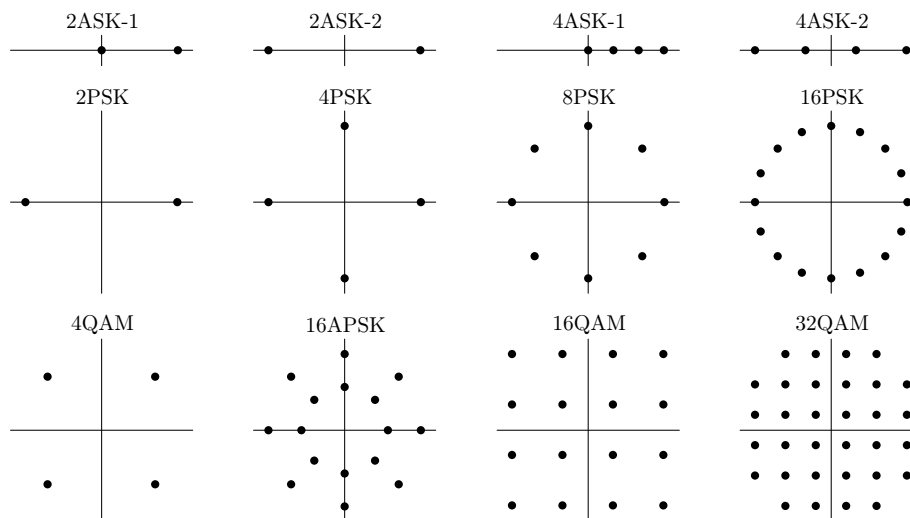


Figure 8.1 – Représentation des modulations (constellations) les plus courantes dans le plan I/Q en l'absence de bruit [16].

Avec M. Pedzisz, nous avons proposé d'utiliser l'entropie de Shannon pour trouver une solution à la reconnaissance de l'onde porteuse. Plus précisément, si on considère un signal complexe brut

$z(n)$  échantillonné, il s'écrit en toute généralité :

$$r(n) = Ax(n) e^{i(\omega_c n T_s + \Theta_c)} + z(n), \quad 0 \leq n < N \quad (8.13)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons,  $x(n)$  est l'enveloppe du signal complexe,  $A$  est l'amplitude,  $\omega_c$  est la fréquence angulaire de la porteuse,  $\Theta_c$  est la phase de la porteuse,  $T_s$  est la période d'échantillonnage and  $z(n)$  correspond à un bruit blanc gaussien additif complexe. Le niveau de bruit est donné par le rapport porteuse-bruit (Carrier to Noise Ratio-CNR). En supposant que la modulation est de type modulation par changement de phase à  $M$  états (M-PSK : 2-PSK, 4-PSK, 8-PSK, ..., Phase Shift Keying), l'enveloppe complexe s'exprime sous la forme :

$$x_{mpsk}(n) = \sum_{k=0}^{K-1} e^{i\varphi_k} u(nT_s - kT) \quad (8.14)$$

où  $K$  est le nombre de symboles observés,  $T$  est la durée d'un symbole,  $\varphi_k$  représente la phase du symbole dans la constellation à  $M$  états  $\varphi_k \in \left\{ \frac{2\pi}{M} \left( m + \frac{1}{2} \right) - \pi, m = 0, 1, \dots, M-1 \right\}$ , et  $u(n)$  est la fonction de forme des impulsions. Si l'enveloppe complexe  $x(n)$  est choisie constante, l'équation (8.13) nous donne l'expression de l'onde porteuse Carrier Wave-CW) :

$$r_{cw}(n) = Ae^{i(\omega_c n T_s + \Theta_c)} + z(n) \quad (8.15)$$

Nous supposons enfin que les états  $\varphi_k$  sont équiprobables et que  $u(n)$  est une fonction rectangulaire.

Nous notons  $\psi$  la variable aléatoire de phase instantanée (instantaneous Phase-IP) du signal inconnu que l'on capte. En utilisant une périodisation de  $2\pi$ , nous pouvons considérer que  $\psi \in \mathbb{R}$ . Pour une onde porteuse, en supposant que l'oscillateur local du récepteur est parfaitement synchronisé à la porteuse ( $\omega_{LO} = \omega_c$  et  $\Theta_{LO} = \Theta_c$ ), il a été démontré, voir [17-19], que la densité de probabilité de la phase instantanée  $p_{cw}(\psi)$  pouvait s'écrire :

$$p_{cw}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos(l\psi) \right] \quad (8.16)$$

avec

$$b_l = \sqrt{\pi\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}} \left[ I_{l-\frac{1}{2}} \left( \frac{\gamma}{2} \right) + I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (8.17)$$

où  $\gamma = A^2 / (2\sigma_z^2) = 10^{CNR/10}$ ,  $\sigma_z^2$  est la variance du bruit et  $I_l(x)$  est la fonction de Bessel modifiée à l'ordre  $l$ . Dans le cas d'une modulation M-PSK, la densité de probabilité de la phase instantanée  $p_{mpsk}(\psi)$  devient :

$$p_{mpsk}(\psi) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} p_{cw} \left[ \psi + \frac{2\pi \left( k + \frac{1}{2} \right)}{M} - \pi \right] \quad (8.18)$$

Maintenant, si le système de réception commet une erreur dans la phase initiale du signal ( $\Theta_{LO} \neq \Theta_c$ ), la densité de probabilité de la phase instantanée  $p_{mpsk}^{\Delta\Theta}(\psi)$  vaut alors :

$$p_{mpsk}^{\Delta\Theta}(\psi) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} p_{cw} \left[ \psi + \frac{2\pi \left( k + \frac{1}{2} \right)}{M} - \pi + \Theta_c - \Theta_{LO} \right] \quad (8.19)$$

Si le système de réception commet une erreur dans l'estimation de la fréquence ( $\omega_{LO} \neq \omega_c$ ), on pose alors  $\Delta_\omega = \omega_c - \omega_{LO}$  ce qui induit un déphasage  $\alpha$  dans la constellation donné par :

$$\alpha = \Delta_\omega(N-1)T_s. \quad (8.20)$$

Après développement et utilisation de la transformation de Fourier, on peut démontrer que la densité de probabilité de la phase instantanée pour la porteuse s'écrit :

$$p_{cw}^{\Delta_\omega}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_l \cos(l\psi) \right], \quad (8.21)$$

ou le terme  $d_l$  vaut :

$$d_l = \frac{\sqrt{\pi\gamma} \sin\left(\frac{l\alpha}{2}\right)}{\frac{l\alpha}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}} \left[ I_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{2}\right) + I_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right]. \quad (8.22)$$

La densité de probabilité de la phase instantanée dans le cas d'une modulation M-PSK sera elle de la forme :

$$p_{mpsk}^{\Delta_\omega}(\psi) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} p_{cw}^{\Delta_\omega} \left[ \psi + \frac{2\pi(k + \frac{1}{2})}{M} - \pi \right]. \quad (8.23)$$

Au final, il est possible d'obtenir une densité de probabilité en fonction du paramètre d'erreur  $\Delta_\omega$  et donc de calculer l'entropie de Shannon de cette densité en fonction de cette erreur. Or, nous avons montré [14] que l'entropie était minimale quand l'erreur était nulle, voir figure 8.2. Il devient alors possible d'estimer la fréquence porteuse en recherchant le minimum d'entropie, voir figure 8.4.

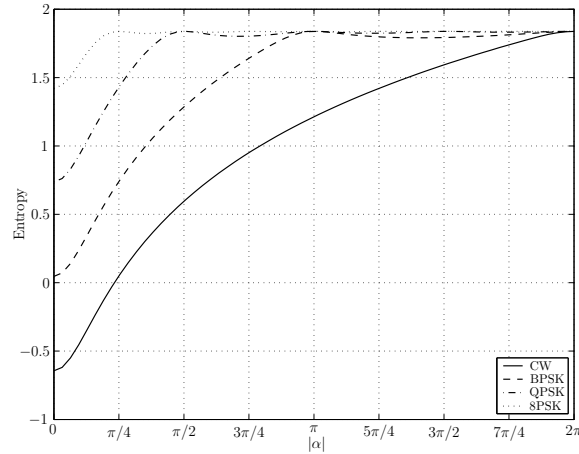


Figure 8.2 – Calcul de l'entropie de Shannon en fonction de  $\alpha$  pour plusieurs modulations [16].

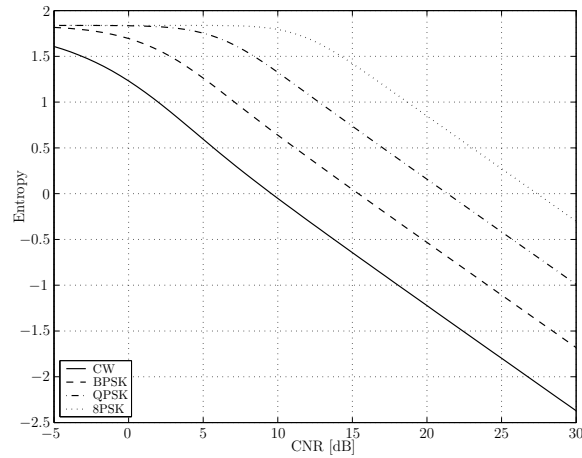


Figure 8.3 – Calcul de l'entropie de Shannon en fonction du niveau de bruit CNR pour plusieurs modulations [16].

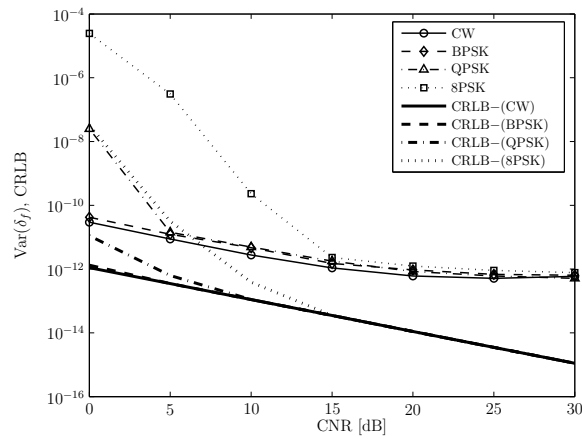


Figure 8.4 – Erreur (variance de l'erreur) dans l'estimation de la fréquence et borne de Cramer-Rao (Cramer-Rao Lower Bounds-CRLB) en fonction du niveau de bruit CNR pour plusieurs modulations [16].

### 8.3 Information et mécanique quantique

Si la notion d'information et de quantification d'information en physique classique joue un rôle important, elle prend certainement une dimension bien supérieure en mécanique quantique. Des phénomènes spécifiques au domaine quantique, comme la superposition d'état ou l'intrication, ajoute une complexité bien plus grande quant à la compréhension de l'information contenue dans un système physique ou de celle de chacune de ses parties.

### 8.3.1 Quelques notions

La mécanique quantique constitue un domaine d'étude tellement large qu'il serait bien présomptueux de chercher à réaliser ici même une simple introduction élémentaire. Ces quelques lignes auront donc pour simple objectif d'introduire, avec beaucoup de raccourcis, quelques notions rudimentaires de mécanique quantique indispensable pour la théorie de l'information, et en particulier la notion de  $q$ -bit. Cette notion se retrouve dans tous les ouvrages d'introduction [20, 21] ou même de simple vulgarisation [22] sur le sujet.

#### Notion de qubit

En physique classique, un système physique, indépendamment des problèmes d'observabilité, est supposé correspondre dans l'espace des phases à un état. En droite ligne du courant de pensée appelé "École de Copenhague" ou "Interprétation de Copenhague" soutenue dans les années 20 par W. Heisenberg, N. Bohr, P. Jordan et M. Born [23], l'état d'un système microscopique comme un photon ou un électron peut se concevoir comme une superposition probabiliste d'états déterministes. Cette interprétation est, jusqu'à présent, restée en parfaite cohérence avec les mesures expérimentales. C'est le cas notamment de la fameuse expérience de O. Stern et de W. [24, 25] qui a mis en évidence la répartition du spin de l'électron (équivalent d'un moment magnétique en physique classique) selon deux états, ou la non moins célèbre expérience de A. Aspect et al. [26, 27] qui met en jeu la superposition d'un photon selon deux états de polarisation.

Concrètement, si l'état d'un système quantique  $\Psi$  est une superposition de deux états purs  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$ , il sera alors appelé un qubit et il sera modélisé comme le vecteur d'un espace vectoriel sur le corps des complexes :

$$\Psi = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } (\psi_0, \psi_1) \in \mathbb{R}^2 \quad (8.24)$$

Si une mesure effective est réalisée, la physique quantique nous dit que l'état  $\mathbf{0}$  sera observé avec une probabilité de  $|\psi_0|^2$  et l'état  $\mathbf{1}$  avec une probabilité de  $|\psi_1|^2$ , avec bien sûr  $|\psi_0|^2 + |\psi_1|^2 = 1$ .

En utilisant les notations de Dirac  $\Psi = |\Psi\rangle$  et

$$|0\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |1\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

l'état quantique  $\Psi$  s'écrit plus conventionnellement :

$$\Psi = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle \quad (8.26)$$

On peut aussi introduire le dual canonique (espace vectorielle des formes linéaires) de ces vecteurs :

$$\Psi^\dagger = \psi_0^* (1, 0) + \psi_1^* (0, 1) = (\psi_0^*, \psi_1^*)$$

où \* indique le complexe conjugué. Les notations de Dirac pour cet espace dual canonique nous donnent :

$$\Psi^\dagger = \langle \Psi |, \quad (1, 0) \Leftrightarrow \langle 0 | \quad \text{et} \quad (0, 1) \Leftrightarrow \langle 1 | \quad (8.27)$$



avec

$$\langle 0|0\rangle = 1 = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle 0|1\rangle = 0 = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

$$\langle 1|0\rangle = 0 = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle 1|1\rangle = 1 = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

Il en découle clairement que  $\Psi^\dagger \cdot \Psi = \langle \Psi | \Psi \rangle = \psi_0^* \psi_0 \langle 0|0\rangle + \psi_1^* \psi_1 \langle 0|0\rangle = |\psi_0|^2 + |\psi_1|^2 = 1$ . On peut écrire aussi :

$$|\Psi\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\Psi\rangle \quad (8.30)$$

On remarquera  $|i\rangle \langle i|$  joue le rôle d'un opérateur de projection sur l'état  $|i\rangle$ .

$$|0\rangle \langle 0| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

$$|1\rangle \langle 1| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

Enfin, si l'état du système est  $|\Psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$ , la probabilité d'observer (par une mesure) **0** et **1** est notée respectivement  $p_0$  et  $p_1$  et on retrouve que :

$$p_0 = \langle \Psi | 0 \rangle \langle 0 | \Psi \rangle = \psi_0^* \cdot \psi_0 = |\psi_0|^2 \quad (8.33)$$

et

$$p_1 = \langle \Psi | 1 \rangle \langle 1 | \Psi \rangle = \psi_1^* \cdot \psi_1 = |\psi_1|^2 \quad (8.34)$$

### Notion d'intrication

Quand deux systèmes classiques ou quantiques indépendants sont décrits dans deux espaces vectoriels  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , il est possible de décrire l'ensemble de ces deux systèmes dans l'espace vectoriel  $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$  où  $\otimes$  représente le produit tensoriel canonique. Par exemple, pour deux systèmes en dimension deux, le produit tensoriel, exprimé sous forme matricielle, donne :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

Dans un contexte quantique, considérons deux qubits indépendants :

$$|\Psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle \quad (8.38)$$

$$|\Phi\rangle = \phi_0 |0\rangle + \phi_1 |1\rangle \quad (8.39)$$

Il est possible d'exprimer l'état  $|\chi\rangle$  du système complexe créé par ces deux qubits en utilisant le produit tensoriel :

$$|\chi\rangle = |\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle \quad (8.40)$$

$$= \psi_0 \phi_0 |0\rangle \otimes |0\rangle + \psi_0 \phi_1 |0\rangle \otimes |1\rangle + \psi_1 \phi_0 |1\rangle \otimes |0\rangle + \psi_1 \phi_1 |1\rangle \otimes |1\rangle \quad (8.41)$$

$$= \psi_0 \phi_0 |00\rangle + \psi_0 \phi_1 |01\rangle + \psi_1 \phi_0 |10\rangle + \psi_1 \phi_1 |11\rangle \quad (8.42)$$

$$= \chi_{00} |00\rangle + \chi_{01} |01\rangle + \chi_{10} |10\rangle + \chi_{11} |11\rangle \quad (8.43)$$

On représente ainsi le système sous la forme d'un état produit (4 composantes). Utiliser le produit tensoriel n'apporte ni ne retranche d'information par rapport aux deux qubits pris séparément. Par ailleurs, on retrouve que :

$$\chi_{00}^* \chi_{00} + \chi_{01}^* \chi_{01} + \chi_{10}^* \chi_{10} + \chi_{11}^* \chi_{11} = \psi_0 \phi_0^* \psi_0 \phi_0 + \psi_0 \phi_1^* \psi_0 \phi_1 + \psi_1 \phi_0^* \psi_1 \phi_0 + \psi_1 \phi_1^* \psi_1 \phi_1 \quad (8.44)$$

$$= (\psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1) (\phi_0^* \phi_0 + \phi_1^* \phi_1) \quad (8.45)$$

$$= 1 \times 1 = 1^* \quad (8.46)$$

En mécanique quantique, on constate expérimentalement que certains systèmes composés de deux qubits dont l'état  $|\chi\rangle$  se décrit bien dans l'espace vectoriel produit de dimension 4 :

$$|\chi\rangle = \chi_{00} |00\rangle + \chi_{01} |01\rangle + \chi_{10} |10\rangle + \chi_{11} |11\rangle \quad (8.47)$$

ne correspond pas au produit tensoriel de deux états quantiques. On parle alors d'un système quantique intriqué. Typiquement, les états de Bell, notamment les états de Bell

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle) \quad (8.48)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) \quad (8.49)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle + |00\rangle) \quad (8.50)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle - |00\rangle) \quad (8.51)$$

sont des états intriqués.

### Notion d'observable

Un point fondamental en mécanique quantique est que si l'on s'intéresse à une quantité liée à un système, cette quantité est associée à un opérateur linéaire hermitien  $\mathbf{L}$  ( $\mathbf{L} = \mathbf{L}^\dagger = [\mathbf{L}^*]^T$ , où  $\mathbf{L}^\dagger$  est l'opérateur adjoint (transposé conjugué) de  $\mathbf{L}$ ). Si on réalise une mesure de cette quantité sur le système, les valeurs effectivement observées seront les valeurs propres  $z$  de cet opérateur et les vecteurs propres  $|\lambda\rangle$  forment une base orthogonale ( $\mathbf{L}|\lambda\rangle = z|\lambda\rangle$ ).

On peut montrer que l'espérance de l'observable  $\langle \mathbf{L} \rangle$  sur un système dont l'état est  $|\psi\rangle$ , vérifie la relation :

$$\langle \mathbf{L} \rangle = \langle \psi | \mathbf{L} | \psi \rangle \quad (8.52)$$

On peut aussi définir la corrélation  $\text{corr} \langle \mathbf{L}, \mathbf{M} \rangle$  entre deux observables  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  par :

$$\text{corr} \langle \mathbf{L}, \mathbf{M} \rangle = \langle \mathbf{LM} \rangle - \langle \mathbf{L} \rangle \langle \mathbf{M} \rangle \quad (8.53)$$

### Matrice de densité

Puisqu'un dispositif expérimental ne fait qu'enregistrer des résultats observés et en déduire, par le biais d'une estimation statistique, des probabilités, l'état d'un système n'est pas complètement mesurable. Pour un système dont l'état est  $|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |\mu_i\rangle$  où  $(|\mu_i\rangle)$  est une base des états possibles du système, on va introduire ce que l'on appelle la matrice de densité  $\rho$  associée à  $|\psi\rangle$ . Cette matrice de densité est définie par :

$$\rho = \sum_i p_i |\mu_i\rangle \langle \mu_i| \quad (8.54)$$

où  $p_i = |\psi_i|^2$  est la probabilité d'être observée à l'état  $|\mu_i\rangle$ . La matrice de densité contient toute l'information utile pour un dispositif expérimental. Ainsi, pour un observable  $\mathbf{L}$  son espérance peut s'exprimer à partir de la matrice densité :

$$\langle \mathbf{L} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{L}) \quad (8.55)$$

où  $\text{Tr}(\cdot)$  est la trace d'un opérateur linéaire.

Soit deux sous-systèmes  $A$  et  $B$  d'un système global  $AB$ . Si  $\text{corr} \langle \rho_A, \rho_B \rangle \neq 0$  alors le système  $AB$  est intriqué (la contraposée est vraie dans le contexte probabiliste gaussien). La corrélation  $\text{corr} \langle \rho_A, \rho_B \rangle \neq 0$  varie entre  $-1$  et  $1$ . Quand un système  $AB$ , tel que  $\text{corr} \langle \rho_A, \rho_B \rangle \neq 0$ , atteint l'une de ces deux valeurs extrêmes, on parle de système intriqué maximal. Par exemple, les états de Bell sont des états intriqués maximaux.

### Entropie de von Neumann

Puisqu'un système peut être décrit par sa matrice de densité et donc sa distribution de probabilités  $p_i$ , il est possible de chercher à lui associer une entropie. Dans les années 50, J. von Neuman proposa d'associer à un état quantique dont sa matrice de densité est  $\rho$ , une entropie  $H_N$  [28] :

$$\mathcal{S}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (8.56)$$

Il est à noter que cette entropie de von Neumann nécessite le calcul du logarithme de matrice de densité  $\ln \rho$ . Considérons le cas où la base  $(|\mu_i\rangle)$  est orthonormale. La matrice de densité s'écrit :

$$\rho = \sum_i p_i |\mu_i\rangle \langle \mu_i| \quad (8.57)$$

et alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\rho) &= -Tr(\rho \ln \rho) = -Tr\left(\sum_i p_i |\mu_i\rangle \langle \mu_i| \ln\left(\sum_j p_j |\mu_j\rangle \langle \mu_j|\right)\right) \\
&= -Tr\left(\sum_i p_i |\mu_i\rangle \langle \mu_i| \left[\sum_j \ln(p_j) |\mu_j\rangle \langle \mu_j|\right]\right) \\
&= -\sum_k \left\{ \langle \mu_k | \sum_i p_i |\mu_i\rangle \langle \mu_i| \left[\sum_j \ln(p_j) |\mu_j\rangle \langle \mu_j|\right] | \mu_k \rangle \right\} \\
&= -\sum_{k,i,j} \delta_{ki} p_i \delta_{ij} \ln(p_j) \delta_{jk} \\
&= -\sum_i p_i \ln(p_i)
\end{aligned}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. On retrouve bien, dans le cas d'une base orthonormale, l'expression d'une entropie de type Gibbs, voir l'expression 8.1.

Un résultat intéressant est que si un système  $AB$  est un état produit ( $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ ) alors :

$$\mathcal{S}(\rho_{AB}) = \mathcal{S}(\rho_A) + \mathcal{S}(\rho_B) \quad (8.58)$$

Dans le cas d'un système  $AB$  quelconque, nous avons :

$$\mathcal{S}(\rho_{AB}) \leq \mathcal{S}(\rho_A) + \mathcal{S}(\rho_B) \quad (8.59)$$

Ce qui peut s'interpréter en disant qu'il y a plus d'information (moins d'ignorance) dans un système  $AB$  corrélé, intriqué, que dans la somme de ses parties  $A$  et  $B$ . Les états intriqués maximaux correspondent à des systèmes contenant un maximum d'information.

**Information mutuelle** Ayant défini une entropie pour un système quantique, il est alors possible de définir, en s'inspirant du formalisme de la théorie de l'information de Shannon, la notion d'information mutuelle  $\mathcal{I}$  par :

$$\mathcal{I}(\rho_{AB}) = \mathcal{S}(\rho_A) + \mathcal{S}(\rho_B) - \mathcal{S}(\rho_{AB}) \quad (8.60)$$

**Entropie conditionnelle** En physique classique, on peut imaginer réaliser une mesure sur un système en considérant que cette mesure n'a aucune répercussion sur l'état de ce système. En physique quantique, il faut prendre beaucoup plus de précaution. Une approche simple consiste, pour mesurer un système quantique, de considérer un ensemble  $\{\Pi_i\}$  d'opérateurs de projection orthogonaux de rang 1, dit de von Neumann, tel que  $\sum_i \Pi_i = \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité. On peut alors imaginer, pour un système  $AB$ , une mesure partielle sur le sous-système  $B$  ce qui se traduit par l'application d'une famille de projecteurs de von Neumann  $\{\Pi_i^B\}$  sur  $B$ , et l'application de l'opérateur identité sur  $A$ , noté  $\mathbf{I}_A$ . Cela revient à appliquer les opérateurs  $\mathbf{I} \otimes \Pi_i^B$  sur le système  $AB$ . La probabilité  $p_i$  que le sous-système  $B$  donne le résultat  $i$  lors de sa mesure est  $p_i = Tr[(\mathbf{I} \otimes \Pi_i^B) \rho_{AB}]$ . L'état du système  $A$  après avoir réalisé une mesure sur  $B$  et obtenu le

résultat  $i$  est décrit par la matrice densité renormalisée  $\rho_i^A = Tr_B [(\mathbf{I} \otimes \Pi_i^B) \rho_{AB}] / p_i$ , où  $Tr_B()$  est la trace partielle<sup>1</sup> sur le sous-espace vectoriel de  $B$ . On peut alors définir l'entropie, notée  $\mathcal{S}(A | \{\Pi_i^B\})$ , de  $A$  conditionnellement à une mesure sur  $B$  réalisée sur la famille d'opérateur  $\{\Pi_i^B\}$  :

$$\mathcal{S}(A | \{\Pi_i^B\}) = \sum_i p_i \mathcal{S}(\rho_i^A) \quad (8.61)$$

**Discorde quantique** À partir de la notion d'entropie conditionnée à des mesures partielles sur  $B$ , il est possible de définir la quantité  $\mathcal{J}(\rho_{AB})_{\{\Pi_i^B\}}$  par :

$$\mathcal{J}(\rho_{AB})_{\{\Pi_i^B\}} = \mathcal{S}(\rho_A) - \mathcal{S}(A | \{\Pi_i^B\}) \quad (8.62)$$

Enfin, la quantité importante pour mettre en évidence une information uniquement portée par une caractéristique quantique du système  $AB$  est la discorde  $d(\rho_{AB})$  [29] :

$$d^B(\rho_{AB}) = \min_{\{\Pi_i^B\}} [\mathcal{I}(\rho_{AB}) - \mathcal{J}(\rho_{AB})_{\{\Pi_i^B\}}] \quad (8.63)$$

Dans cette expression, on cherche le minimum sur l'ensemble des familles de projecteurs de von Neumann.

### 8.3.2 Radar quantique

Depuis maintenant plus de dix ans, j'ai vu le terme de "radar quantique" naître, dans un premier temps, comme un concept nébuleux au contour peu clair, puis ce terme est apparu dans quelques articles théoriques sérieux et sur quelques sites scientifiques ou technologiques. Ces dernières années les mots de "radar" et de "quantique" ont même fini par se répandre dans des articles de presse à visée géostratégique. Certaines grandes puissances en disposeraient déjà, ou serait proche d'en disposer, et ce nouveau dispositif remettrait en cause les armements actuels les plus sophistiqués. Bien souvent, ces derniers articles ne s'appuyaient que des idées très générales sans réellement expliquer la nature même de ce dispositif.

Pour l'heure, la notion de "radar quantique" reste toujours, à mon sens, un idée très vague. Comme l'explique M. Lanzagorta [30], tout radar incluant dans l'ensemble de son système un dispositif faisant appel à un phénomène quantique, par exemple dans sa chaîne de traitement électronique du signal, peut se prévaloir de l'adjectif "quantique". Donc parler de "radar quantique" peut légitimement laisser place à de nombreuses interrogations quant à la réalité sous-jacente. Néanmoins, il ne faut sans doute pas non plus rejeter en bloc les nouvelles approches s'appuyant sur la mécanique quantique pour proposer des modèles disruptifs pertinents en technologies radar. Par exemple, la notion d'illumination quantique constitue peut-être une voie scientifique féconde à explorer.

#### Radar à illumination quantique

En 2008, S. Lloyd [31, 32] a présenté le cas d'une paire de photons  $A$  et  $S$  (2 qubits) intriqués maximale. Le photon  $S$  est envoyé sur une cible potentielle, voir la figure 8.5. On suppose le

1. Si l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  est le produit tensoriel de deux sous-espaces  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  et si  $\{\hat{e}_i^2\}$  est une base de  $\mathcal{E}_2$  plongée dans  $\mathcal{E}$ , la trace partielle d'un opérateur  $\rho$  sur le sous-espace  $\mathcal{E}_2$  est définie par  $Tr_{\mathcal{E}_2}(\rho) = \sum_i \langle \hat{e}_i^2 | \rho | \hat{e}_i^2 \rangle$ .

photon  $S$  de retour et on réalise une mesure couplée du système  $AS$ . Deux hypothèses sont alors envisageables. Dans la première hypothèse  $H_0$ , il n'y a pas de cible, ou elle a été manquée, et le photon  $S$  n'est pas revenu. La mesure que réalise alors système de réception n'est pas celle du système "AS" mais celle du photon A et d'un photon thermique (bruit ambiant). Dans la seconde hypothèse  $H_1$ , la cible est présente et le photon de retour  $S$  est bien pris en compte dans la mesure des deux qubits. S. Lloyd compare alors ce dispositif à un dispositif équivalent dans lequel il n'y a pas d'intrication au départ et dans lequel un photon "S" isolé est envoyé. Ce qu'il a montré est qu'en théorie de la décision, le dispositif initialement intriqué donnait, dans un certain régime de fonctionnement, des résultats bien supérieur à celui du photon "S" isolé, voir table 8.1.

Il est important de préciser que S. Lloyd se place dans le contexte de l'optique et il est connu que, pour ce domaine de longueur d'onde, le milieu de propagation, en interagissant avec le photon "S", va annuler très rapidement le niveau d'intrication du système "AS". Or, le plus surprenant est que, malgré cette perte d'intrication, l'avantage du système initialement intriqué persiste. Ce phénomène, appelé illumination quantique, mis en avant par S. Lloyd [31] et précisé par la suite par S.-H. Tan [32], a marqué un tournant décisif et à ouvert la voie au développement du concept de radar à illumination quantique [33].

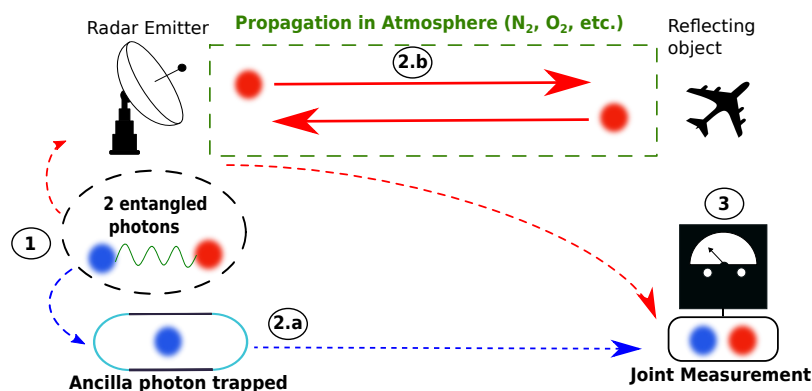


Figure 8.5 – Principe général d'un radar à illumination quantique [34].

Radar scheme	Single-photon		Entangled photons	
	no=(-)	yes=(+)	no=(-)	yes=(+)
$H_0$	$1 - n_b$	$n_b$	$1 - \frac{n_b}{2}$	$\frac{n_b}{2}$
$H_1$	$p(1 - n_b)$	$(1 - p) + pn_b$	$p(1 - \frac{n_b}{2})$	$(1 - p) + p\frac{n_b}{2}$

Table 8.1 – Tableau des probabilités des hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  d'après la modélisation de Lloyd [31], voir [34].

Pour ma part, le radar quantique à illumination quantique restait un sujet théorique intéressant mais très éloigné des préoccupations de mon activité de recherche davantage portée sur le domaine micro-onde et les systèmes radars classiques. Mon avis a radicalement changé lorsque plusieurs articles ont commencé à montrer la possibilité d'émettre des paires de photons micro-onde intriqués et d'envisager les systèmes d'illumination quantique dans ces gammes de fréquence [35-38]. Ces

dernières années, j'ai donc pris au sérieux ce sujet et préparé le lancement d'une thèse sur cette thématique. La thèse en question, financée par l'Agence Innovation Défense et dirigée par A. Khenchaf, est actuellement menée par S. Borderieux depuis fin 2019.

### **Théorie de l'information et illumination quantique (thèse de S. Borderieux)**

La thèse de S. Borderieux se place dans le contexte général du radar à illumination quantique et plus particulièrement dans le cas où on considère des photons micro-onde. Le point important à souligner est que pour une paire de photons micro-onde initialement intriquée, la propagation dans le milieu élimine l'intrication bien plus lentement que dans le cas optique. L'intrication peut même être conservée sur plusieurs dizaines de kilomètres.

L'objectif de la thèse est, au travers de la théorie de l'information, de chercher à approfondir la compréhension du phénomène d'illumination quantique au sein d'une chaîne radar en fonction du canal de propagation et de la nature de la cible [39]. L'effet de la propagation sur le photon "S" est modélisé en considérant que l'environnement est un bain d'oscillateurs décorrélés et en traduisant l'influence de cet environnement par un opérateur

Par exemple, ce travail conduit à mettre en évidence la différence entre des quantifications de l'intrication, tel que la concurrence de Wootters  $\mathcal{C}(\rho_{AS})$  ou le taux d'intrication  $\mathcal{E}(\rho_{AS})$  [40, 41], pour les deux qubits "AS" et la discordance quantique qui joue un rôle plus particulier [42, 43].

Je ne souhaite pas ici dévoiler davantage les travaux de S. Borderieux qu'il présentera de façon complète lors de sa soutenance de thèse fin 2022. A titre de simple illustration, la figure 8.6 représente une comparaison entre la discordance, le taux d'intrication et la concurrence de Wootters pour des photons à  $10\text{ GHz}$  lorsque le photon "S" est soumis à l'effet de son milieu de propagation. Les travaux de S. Borderieux peuvent se retrouver dans ses conférences [44-46] et dans un prochain article de revue [34].

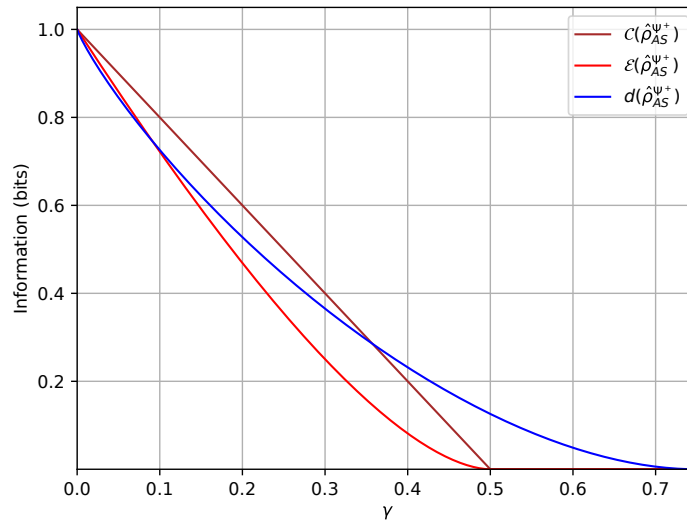


Figure 8.6 – Concurrence de Wootters  $\mathcal{C}(\rho_{AS})$ , taux d'intrication quantique  $\mathcal{E}(\rho_{AS})$  et discord quantique  $d(\rho_{AS})$  en fonction du paramètre  $\gamma = 1 - e^{-\kappa t}$  [46].

### 8.3.3 Pour aller plus loin

Sous l'influence de travaux théoriques récents, comme ceux notamment de A. Döring [47-51] et de C. Heunen [52, 53], la modélisation de la mécanique quantique peut se réécrire sous une forme algébrique en utilisant la théorie des catégories et plus spécifiquement celle des topos [54, 55]. Cette approche algébrique apporte un regard nouveau sur la compréhension des phénomènes quantiques et notamment de l'intrication [56-58].

Cette approche me semble constituer une voie très riche à suivre et a motivé des prises de contact sur le sujet avec d'autres collègues, notamment avec R. Duncan de l'université de Strathclyde à propos des travaux de thèse qu'il conduit [59]. Il est à noter que l'approche théorique des catégories et topos pour la modélisation de l'entropie et de l'information en mécanique quantique fait déjà l'objet d'avancées significatives [60, 61].



## 8.4 Conclusion

L'activité de recherche décrite dans ce chapitre comporte deux aspects présentant des échelles de temporalité radicalement différentes.

Le premier aspect traite de l'information telle qu'elle été introduite par C. E. Shannon et qui s'inspire du formalisme de la thermodynamique du xix<sup>e</sup> siècle. Cette théorie fait globalement partie du bagage scientifique général d'un chercheur en télécommunication et en télédétection. L'information est la préoccupation majeure et l'entropie de Shannon en est un modèle mathématique incontournable. Sans évoquer d'autres exemples de mes travaux de recherche et développement, j'ai montré comment cette entropie pouvait être efficace dans le domaine de la guerre électronique.

Le deuxième aspect concerne l'essor considérable que connaît, depuis le début du xxi<sup>e</sup> siècle, la théorie quantique de l'information et surtout son application à un domaine aussi récent que celui du radar à illumination quantique. Nous nous trouvons là au cœur d'une activité de recherche où la théorie est très loin d'être clairement établie. Le travail présenté ici reflète une recherche en cours et est donc essentiellement présent pour illustrer une démarche prospective.

## Références

1. Borges, J. L. in *Fictions* Nouvelle édition augmentée, 71-81 (nrf, Gallimard, 1983).
2. Lasswitz, K. La bibliothèque universelle. *La Nouvelle Revue Française* **565**, 337-351 (2003).
3. Lesne, A. Shannon entropy : a rigorous notion at the crossroads between probability, information theory, dynamical systems and statistical physics. *Mathematical Structures in Computer Science* **24**, e240311 (2014).
4. Clausius, R. *The Mechanical Theory of Heat : With Its Applications to the Steam-engine and to the Physical Properties of Bodies* (John van Voorst, London, 1865).
5. Boltzmann, L. in *Wissenschaftliche Abhandlungen* (éd. Hasenöhrl, F.) 9-33 (Cambridge University Press, 2012). doi :[10.1017/CB09781139381420.003](https://doi.org/10.1017/CB09781139381420.003).
6. Boltzmann, L. *Vorlesungen Über Gastheorie (I. Theil)* (Leipzig, Verlag Von Johann Ambrosius Barth, 1896).
7. Boltzmann, L. *Vorlesungen Über Gastheorie (II. Theil)* (Leipzig, Verlag Von Johann Ambrosius Barth, 1898).
8. Shannon, C. E. A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal* **27**, 379-423, 623-656 (1948).
9. Cover, T. & Thomas, J. *Elements of information theory* 2nd edition (Wiley, New York, 2006).
10. Kullback, S. & Leibler, R. On information and sufficiency. *Ann. Math. Statist.* **22**, 79-86 (1951).
11. Amari, S.-I. *Information Geometry and Its Applications* (Springer, 2016).
12. Blanc, J.-L. *Transmission de l'information et complexité des activités de populations neuronales* thèse de troisième cycle (Aix-Marseille Université, 2012).
13. Granero-Belinchón, C. *Multiscale Information Transfer in Turbulence* thèse de troisième cycle (Université de Lyon, 2018).

14. Pedzisz, M. & Coatanhay, A. Minimum Entropy Approach for Carrier Frequency Recovery. *IEEE Trans. Wireless Communications* **5**, 1-5 (2006).
15. Pedzisz, M. *Séparation et reconnaissance des signaux d'interception en télécommunications* thèse de troisième cycle (Université de Bretagne Occidentale, 2006).
16. Pedzisz, M. *Extraction et traitement automatique dans un contexte de communications* mémoire de master (ENSTA Bretagne, Université de Bretagne Occidentale, 2003).
17. Whalen, A. *Detection of Signals in Noise* (Academic Press, NY, 1971).
18. Blachman, N. Gaussian noise. II. Distribution of phase change of narrow-band noise plus sinusoid. *IEEE Transactions on Information Theory* **34**, 1401-1405 (1988).
19. Schreyögg, C. & Reichert, J. *Modulation Classification of QAM Schemes Using the DFT of Phase Histogram Combined With Modulus Information in MILCOM* (1997).
20. Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F. *Mécanique quantique* (EDP Sciences/CNRS Éditions, 2018).
21. Griffiths, D. J. & Schroeter, D. F. *Introduction to quantum mechanics* Third edition (Cambridge University Press, 2018).
22. Susskind, L. & Friedman, A. *Quantum mechanics - The theoretical minimum* (Basic Books, 2014).
23. Gamow, G. *Thirty Years that Shook Physics : The Story of Quantum Theory* republication de l'ouvrage de 1966 (Dover Publication Inc., 1985).
24. Gerlach, W. & Stern, O. Das magnetische Moment des Silberatoms. *Zeitschrift für Physik* **9**, 353-355 (1922).
25. Gerlach, W. & Stern, O. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. *Zeitschrift für Physik* **9**, 353-355 (1922).
26. Aspect, A., Grangier, P. & Roger, G. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460-463 (7 août 1981).
27. Aspect, A., Grangier, P. & Roger, G. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91-94 (2 juil. 1982).
28. Von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* réédition de l'ouvrage de 1955 (Princeton University Press, 2018).
29. Streltsov, A. *Quantum Correlations Beyond Entanglement and Their Role in Quantum Information Theory* (Springer, 2015).
30. Lanzagorta, M. *Quantum Radar* (Morgan & Claypool, 2012).
31. Lloyd, S. Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination. *Science* **321**, 1463-1465 (2008).
32. Tan, S.-H., Erkmen, B. I., Giovannetti, V., Guha, S., Lloyd, S., Maccone, L., Pirandola, S. & Shapiro, J. H. Quantum Illumination with Gaussian States. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 253601 (25 déc. 2008).
33. Shapiro, J. H. The Quantum Illumination Story. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine* **35**, 8-20 (2020).

34. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Estimation of the Influence of a Noisy Environment on the Binary Decision Strategy in a Quantum Illumination Radar* (submitted).
35. Barzanjeh, S., Abdi, M., Milburn, G. J., Tombesi, P. & Vitali, D. Reversible Optical-to-Microwave Quantum Interface. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 130503 (13 sept. 2012).
36. Barzanjeh, S., Guha, S., Weedbrook, C., Vitali, D., Shapiro, J. H. & Pirandola, S. Microwave Quantum Illumination. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 080503 (8 fév. 2015).
37. Sanz, M., Fedorov, K. G., Deppe, F. & Solano, E. *Challenges in Open-air Microwave Quantum Communication and Sensing in 2018 IEEE Conference on Antenna Measurements Applications (CAMA)* (2018), 1-4. doi :[10.1109/CAMA.2018.8530599](https://doi.org/10.1109/CAMA.2018.8530599).
38. Barzanjeh, S., Pirandola, S., Vitali, D. & Fink, J. M. Microwave quantum illumination using a digital receiver. *Science Advances* **6**, eabb0451 (2020).
39. Brandsema, M. J. *Formulation and Analysis of the Quantum Radar Cross Section* thèse de troisième cycle (The Pennsylvania State University, 2017).
40. Wootters, W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245-2248 (10 mar. 1998).
41. An-Min, W. A Simplified and Obvious Expression of Concurrence in Wootters' Measure of Entanglement of a Pair of Qubits. *Chinese Physics Letters* **20**, 1907-1909 (nov. 2003).
42. Weedbrook, C., Pirandola, S., Thompson, J., Vedral, V. & Gu, M. How discord underlies the noise resilience of quantum illumination. *New Journal of Physics* **18**, 043027 (avr. 2016).
43. Bradshaw, M., Assad, S. M., Haw, J. Y., Tan, S.-H., Lam, P. K. & Gu, M. Overarching framework between Gaussian quantum discord and Gaussian quantum illumination. *Phys. Rev. A* **95**, 022333 (2 fév. 2017).
44. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Study of the entanglement Rate Influence in a Quantum Illumination Radar Scheme : Information Theory Approach in 2021 IEEE Conference on Antenna Measurements Applications (CAMA)* (2021), 118-123. doi :[10.1109/CAMA49227.2021.9703539](https://doi.org/10.1109/CAMA49227.2021.9703539).
45. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Study of the atmospheric influence on a quantum illumination radar scheme with an information theory approach in European Quantum Technologies Conference EQTC* (2021).
46. Borderieux, S., Coatanhay, A. & Khenchaf, A. *Entanglement Decay of Microwave photons in Atmosphere in a Quantum Illumination Radar Scheme in PhotonIcs & Electromagnetics Research Symposium Conference PIERS* (avr. 2022).
47. Döring, A. in *Quantum Field Theory : Competitive Models* (éd. Fauser, B., Tolksdorf, J. & Zeidler, E.) 25-47 (Birkhäuser Basel, Basel, 2009). isbn : 978-3-7643-8736-5. doi :[10.1007/978-3-7643-8736-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8736-5_2). [https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8736-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8736-5_2).
48. Döring, A. & Isham, C. *A Topos Foundation for Theories of Physics : I. Formal Languages for Physics* arXiv :quant-ph/0703060.
49. Döring, A. & Isham, C. *A Topos Foundation for Theories of Physics : II. Daseinisation and the Liberation of Quantum Theory* arXiv :quant-ph/0703062.
50. Döring, A. & Isham, C. *A Topos Foundation for Theories of Physics : III. The Representation of Physical Quantities With Arrows* arXiv :quant-ph/0703064.

51. Döring, A. & Isham, C. *A Topos Foundation for Theories of Physics : IV. Categories of Systems* arXiv :quant-ph/0703066.
52. Heunen, C., Landsman, N. P. & Spitters, B. A Topos for Algebraic Quantum Theory. *Communications in Mathematical Physics* **291**, 63-110 (2009).
53. Heunen, C., Vicary, J. & Wester, L. *Mixed quantum states in higher categories* arXiv :1405.1463.
54. Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician* Second Edition (Springer, 1998).
55. Mac Lane, S. & Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic - A First Introduction to Topos Theory* (Springer, 1992).
56. Heunen, C. & Vicary, J. *Categories for Quantum Theory* (Oxford University Press, 2019).
57. Flori, C. *A First Course in Topos Quantum Theory* (Springer, 2013).
58. Flori, C. *A Second Course in Topos Quantum Theory* (Springer, 2018).
59. Dunne, K. *A Categorical Approach to the Foundations of Quantum Theory* thèse de troisième cycle (University of Strathclyde, 2018).
60. Vigneaux, J. P. *Topology of statistical systems, A cohomological approach to information theory* thèse de troisième cycle (Université Paris Diderot, 2019).
61. Constantin, C. M. *Sheaf -Theoretic Methods in Quantum Mechanics and Quantum Information Theory* thèse de troisième cycle (University College, University of Oxford, 2015).



---

# Conclusion générale

---

La synthèse de mes recherches que nous venons de réaliser dans ce document, depuis mon doctorat jusqu'à aujourd'hui, couvre des activités s'étalant sur plus de vingt ans. D'aucuns pourront juger ce temps excessivement long. Je l'ai jugé pour ma part absolument nécessaire. Au cours de ma carrière, j'ai été régulièrement confronté à des changements de thématiques académiques radicaux ou du moins à des changements de points de vue substantiels. C'est très clairement une vision de la recherche qui me convient car je ne la conçois pas comme une routine rassurante. Elle est davantage, pour moi, comme une compagne au quotidien qui n'a de cesse de vous remettre en question. Souvent passionnante, mes recherches ont aussi souvent porté en elles les germes d'une déstabilisation intellectuelle où les acquis du prêt-à-penser ont généralement été réduits à peu de choses.

Dès le travail de thèse, pourtant bien posé initialement dans le cadre conceptuel de la théorie modale en physique des ondes, j'ai rapidement dû constater que les équations décrivant la physique m'amenaient vers les rives aventureuses de la théorie des séries divergentes. La grande majorité de ce que j'avais appris en classes préparatoires ou en cycle d'ingénieur était alors devenu sans objet. De même, il est clairement apparu que je ne pouvais pas me contenter du cadre initialement prévu mais que je devais aussi prendre en compte l'ensemble de la théorie de rayon applicable à la problématique.

Au cours des trois années qui ont suivi, plongé en milieu biomédical et face à des experts dans leur domaine qui attendent de vous la maîtrise d'un bagage scientifique qu'ils jugent minimal, quelquefois confronté aux patients d'un établissement psychiatrique, il devient nécessaire d'apprendre rapidement des connaissances nouvelles et réapprendre ce que vous saviez déjà. Les deux questions importantes à se poser dans ce contexte sont alors : parmi tout ce que je sais, qu'est ce qui est maintenant utile ? parmi tout ce que je ne sais pas, qu'est ce qu'il m'est indispensable d'apprendre ? Mon travail dans ce centre de recherche en neurosciences a dans un premier temps consisté à apporter à court terme des solutions adaptées (traitement du signal). Dans un second temps, en adoptant un regard différent, j'ai pu proposer, à plus long terme, une approche s'appuyant sur la modélisation électromagnétique des champs relatifs à l'activité cérébrale et sur le problème inverse associé.

À mon arrivée à l'ENSTA Bretagne, j'ai aussi constaté rapidement que les développements théoriques de la modélisation des ondes dans le sol et le traitement du problème d'inversion par des techniques de régularisation ne pouvaient résister bien longtemps à la réalité expérimentale. S'agissant de la théorie de la diffusion par des surfaces irrégulières, devant, dans une première étape, assimiler le corpus scientifique de la théorie des surfaces rugueuses et des approches asymptotiques, j'ai pu en saisir toute la diversité lorsque ces approches ont été appliquées au milieu maritime. Mes questionnements scientifiques m'ont aussi conduit à adopter d'autres points de vue comme l'étude du mouvement déterministe des vagues en lien avec la mécanique des fluides ou comme celui de la description stochastique et de la théorie mathématique du calcul différentiel d'Itô.

Même la problématique a priori classique de la diffraction par des sommets a connu des déve-

loppements complètement hors cadre vers la théorie de l'apprentissage profond. Je ne parle pas non plus de la théorie de l'information de Shannon qui m'a permis d'obtenir des résultats publiés et dont il a fallu reprendre complètement le cadre conceptuel pour traiter de nouvelles problématiques en mécanique quantique.

Pour établir des liens entre toutes ces diverses théories et construire une cohérence scientifique, il faut impérativement une prise de recul et mener une réflexion sur le temps long. Par ailleurs, la maîtrise de ces contextes et de ces théories a également nécessité, pour ma part, un effort important de formation permanente, comme l'illustre mon parcours universitaire en mathématiques fondamentales.

Enfin, j'ajouterais que mon travail d'encadrement des étudiants doctorants m'a aussi convaincu que le monde de la recherche ne se résumait pas à l'alignement de formules ésotériques, mais que le facteur humain jouait un rôle primordial. Mener à bien une thèse ne s'apparente absolument pas à la production industrielle façon Andy Warhol. La personnalité et la motivation de l'étudiant sont essentielles quant à l'aboutissement du travail de doctorat. L'encadrant doit être capable à la fois de fixer un cap et à la fois de prendre en compte les aspirations de l'étudiant. Je pense que mes multiples expériences d'encadrement m'ont, sans doute, apporté plus de compétences pour gérer les difficultés et pour établir des compromis entre les envies du doctorant et les contraintes du projet de thèse.

L'ensemble de ces éléments fait que je ne regrette en rien le choix d'avoir pris plus de temps qu'habituellement pour me lancer dans la rédaction de ce mémoire. Je terminerais en disant que ma démarche d'Habilitation à Diriger les Recherches ne se résume pas non plus à un exercice rétrospectif. Les chapitres de cette synthèse, du moins ceux concernant mon activité à l'ENSTA Bretagne, incluent systématiquement une rubrique "Pour aller plus loin" et les perspectives de mes activités de recherche sont déjà solidement construites. Dans le domaine de la télédétection, les collaborations avec mes collègues de la mécanique des fluides vont se poursuivre et des projets de recherche en ce sens vont vraisemblablement être financés, par exemple par le biais de l'ONR. Les résultats déjà obtenus en modélisation stochastique dans un contexte maritime ont suscité beaucoup d'intérêts et de nouvelles thèses sur le sujet, notamment en étudiant l'application à l'imagerie SAR, sont prévues. Dans le domaine des télécommunications, de nouveaux résultats doivent très prochainement voir le jour. Sur la problématique du radar à illumination quantique et sur la théorie quantique de l'information en général, le travail de recherche n'en est qu'à ses débuts et plusieurs pistes ouvrent de nouveaux axes de recherche. Enfin, le manque d'HDR m'a privé de plusieurs occasions de lancer des coopérations au plan national et international, en télédétection et dans les technologies quantiques. L'obtention de ce diplôme devrait constituer, pour moi, un accélérateur important pour mes projets de recherche et un moyen de faciliter le passage à une échelle de coopération supérieure.

"Quand je passe en revue ces grandes étapes de mon cheminement intérieur, tout au cours des dix années écoulées, je constate que chacune d'elles a été préparée et jalonnée, tout comme la première dont je viens de parler, par un ou plusieurs rêves. L'histoire de ma maturation vers une connaissance de moi-même et vers une compréhension de l'âme humaine se confond, à peu de choses près, avec l'histoire de mon expérience du rêve. Pour le dire autrement : la connaissance à laquelle je suis parvenu sur ma propre personne et sur la psyché en général, se confond quasiment avec mon expérience du rêve, et avec la connaissance du rêve qui en est un des fruits."

Alexandre Grothendieck - La clef des songes ou Dialogue avec le Bon Dieu (1987)