



**HAL**  
open science

## Modélisations simplifiées de structures sandwich

Philippe Le Grogneq

► **To cite this version:**

Philippe Le Grogneq. Modélisations simplifiées de structures sandwich. 24ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2019, Brest, France. hal-03243225

**HAL Id: hal-03243225**

**<https://ensta-bretagne.hal.science/hal-03243225>**

Submitted on 31 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisations simplifiées de structures sandwich

P. LE GROGNEC<sup>a</sup>

a. ENSTA Bretagne, UMR CNRS 6027, IRDL, F-29200 Brest, France

[philippe.le\\_grogneq@ensta-bretagne.fr](mailto:philippe.le_grogneq@ensta-bretagne.fr)

## Résumé :

*Les structures sandwich réalisent sans doute le meilleur compromis en termes de structures minces, alliant une bonne résistance mécanique générale à une masse raisonnable. Cependant, malgré leurs propriétés spécifiques indiscutables, ces structures peuvent souffrir de comportements indésirables (vibrations, flambement) non seulement globaux mais surtout locaux, du fait de la présence d'éléments minces (comme les peaux ou certains types d'âme) ou élancés (comme d'éventuels renforts dans l'épaisseur de l'âme). Des travaux ont été entrepris, visant donc à modéliser, le plus efficacement possible, le comportement de ce type de structures à des fins de dimensionnement mécanique. Des solutions analytiques originales ont tout d'abord été obtenues, dans le cas de poutres sandwich à âme homogène, pour les fréquences propres de vibration et charges critiques de flambement ainsi que les modes associés, qui s'avèrent très similaires. Un modèle élément fini 1D enrichi a ensuite été mis en œuvre, qui permet de résoudre les deux types de problèmes dans un contexte plus général, en intégrant éventuellement l'effet de non-linéarités matérielles et/ou géométriques. Enfin, des solutions sont proposées pour la modélisation de sandwichs renforcés dans l'épaisseur.*

## Abstract:

*Sandwich structures are increasingly used in a wide range of industrial applications, thanks to their good compromise reached between stiffness and lightness. However, despite unquestionable specific properties, these structures are vulnerable to global but also local vibration and buckling phenomena, due to the presence of thin and/or slender elements such as the skins or possible core reinforcements. Work has been thus undertaken so as to model the mechanical behavior of such structures in an efficient way, for dimensioning purposes. In the case of sandwich columns with homogeneous core, original analytical solutions have been obtained for the eigenfrequencies and critical loads together with the associated modes, which turn out to be very similar to each other. A 1D enriched finite element has next been developed, so as to solve both problems in a unified and more general context, involving possibly material and/or geometric non-linearities. Finally, solutions are proposed for the modeling of sandwich structures reinforced through the thickness direction.*

**Mots clefs : Vibrations locales/globales, flambement élastoplastique, renforts 3D, solutions analytiques, éléments finis enrichis.**

# 1 Introduction

Les matériaux sandwich sont des composites formés, le plus souvent, de deux peaux minces et rigides séparées par une âme plus souple et plus épaisse (éventuellement renforcée). Cette configuration fournit à la structure résultante à la fois une extrême légèreté et de bonnes propriétés mécaniques, ce qui explique l'emploi croissant de ce type de matériaux dans des secteurs industriels de pointe tels que le domaine des transports où l'allègement des structures constitue un enjeu majeur. Cependant, du fait de la présence d'éléments minces et/ou élancés (peaux, renforts, ...), de tels matériaux sont sensibles aux chargements de compression (qui mènent au flambement) et de manière générale aux phénomènes de vibration, qui peuvent s'exprimer de manière globale mais aussi locale, à l'échelle mésoscopique des constituants du sandwich.

A ce titre, les sandwichs ont fait l'objet de nombreuses études portant spécifiquement sur la modélisation de ces phénomènes locaux [1,2]. Les modèles développés ou utilisés sont soit analytiques et portent alors le plus souvent sur des approches de type « stratifié » avec des approximations de type « poutre » (ou « plaque ») pour chacune des couches [3], soit numériques et s'appuient alors sur des représentations 2D (ou 3D) de taille réduite [4]. De manière exceptionnelle, on peut citer un élément poutre qui a été spécifiquement développé pour ce type d'analyse, mais avec une cinématique polynomiale simplifiée et une linéarisation de la formulation qui ne permet pas l'étude du post-flambement lointain [5].

L'idée générale des travaux réalisés depuis quelques années sur les structures sandwich est la recherche d'une solution optimale qui permette de répondre à la fois précisément et efficacement aux problèmes de vibrations et de flambement/post-flambement de structures sandwich, en représentant de manière unifiée aussi bien les phénomènes globaux que locaux. Des solutions analytiques explicites ont été tout d'abord développées dans le cas de poutres sandwich (pour certains problèmes simples) à l'aide d'une formulation mixte poutre/2D originale [6,7]. A partir de la « cinématique » obtenue au sein de l'âme, un modèle élément fini enrichi 1D a été mis en œuvre en vue de répondre à davantage de problèmes (chargements, conditions aux limites, ...) en présence éventuelle de non-linéarités géométriques et matérielles [8,9]. Le programme associé s'appuie en particulier sur des méthodes numériques de longueur d'arc et de branch-switching afin de pouvoir décrire correctement le comportement de ces structures en post-flambement jusqu'à un stade avancé, sans l'ajout arbitraire d'imperfections initiales. Les résultats analytiques (lorsque c'est possible) ainsi que les résultats numériques 1D ont été comparés à des résultats numériques de référence 2D (obtenus sur Abaqus), à des fins de validation. Certains résultats remarquables ont été obtenus, en termes de modes locaux de vibration ou de flambement, mais aussi d'interaction modale (qui se manifeste par du flambement secondaire).

Enfin, on présente quelques résultats encourageants concernant la modélisation de poutres sandwich renforcées dans la direction de l'épaisseur (de manière périodique), effectuée à l'échelle d'une cellule unité et mettant en jeu la théorie des ondes de Bloch [10,11].

## 2 Modélisation analytique

Les deux problèmes de vibration et de flambement (linéarisés) d'une poutre sandwich à âme homogène ont été résolus tout d'abord analytiquement. Les peaux minces sont représentées par des poutres d'Euler-Bernoulli tandis que l'âme est considérée comme un milieu continu 2D en contraintes

planes, sans hypothèses cinématiques particulières. Les fréquences propres de vibration (et les modes associés) ont été obtenues à partir de la formulation du principe d'Hamilton :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0$$

tandis que les charges critiques de flambement (ainsi que les modes correspondants) ont été calculées en résolvant l'équation de bifurcation suivante :

$$\forall \delta \bar{u}, \quad \int_{\Omega} \nabla^T \delta \bar{u} : \mathbf{K}^i(\bar{u}_f(\lambda_c)) : \nabla \bar{X} d\Omega = 0$$

en négligeant les pré-contraintes au sein de l'âme.

Après intégration par parties, on aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles dont la résolution (après prise en compte des conditions de continuité et aux limites) donne lieu à des solutions analytiques explicites dans les deux cas, dès lors qu'on considère des conditions aux limites simples (et un chargement simple de compression axiale ou de flexion pure pour le flambement).

En vibrations comme en flambement, on obtient des modes sinusoïdaux dans la direction longitudinale. Les deux peaux se déforment en phase (modes antisymétriques) ou en opposition de phase (modes symétriques). La forme des modes selon l'épaisseur (de l'âme) dépend légèrement du problème considéré (flambement élastique en compression axiale ou flexion pure, flambement plastique, vibrations), mais se résume le plus souvent à une combinaison de fonctions hyperboliques.

### 3 Élément fini 1D enrichi

En vue de considérer des chargements/conditions aux limites plus généraux, et d'aborder de manière plus complète le cas de non-linéarités géométriques et/ou matérielles, un modèle numérique s'avère indispensable. Par souci d'efficacité, un modèle élément fini 1D de « poutre sandwich » a été développé. Afin de garantir cependant la meilleure précision possible, y compris dans la description des phénomènes de vibration et de flambement locaux, la cinématique enrichie du modèle (et en particulier de l'âme) s'inspire de celle obtenue naturellement au cours des calculs analytiques précédents :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^c(x, y) = U_0^c(x) + U_1^c(x) \sinh(\beta y) + U_2^c(x) y \cosh(\beta y) + \\ \quad \Psi_1(x) \cosh(\alpha y) + \Psi_2(x) \sinh(\alpha y) + \Psi_3(x) y \cosh(\alpha y) + \Psi_4(x) y \sinh(\alpha y) \\ V^c(x, y) = V_0^c(x) \cosh(\beta y) + V_1^c(x) y + V_2^c(x) y \sinh(\beta y) + \\ \quad \Psi_5(x) \cosh(\alpha y) + \Psi_6(x) \sinh(\alpha y) + \Psi_7(x) y \cosh(\alpha y) + \Psi_8(x) y \sinh(\alpha y) \end{array} \right.$$

Les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  intervenant dans la cinématique de l'âme permettent, une fois choisis de manière appropriée, de reproduire respectivement les réponses locales et globales (antisymétriques et symétriques) de la poutre sandwich.

Les inconnues cinématiques relatives aux peaux (toujours modélisées par des poutres), ajoutées aux inconnues précédentes associées à l'âme, mènent à la définition d'un élément fini 1D, quadratique (à 3 nœuds), possédant 14 degrés de liberté par nœud, une fois les conditions de continuité (aux interfaces entre l'âme et les peaux) prises en compte. Le comportement des peaux est supposé élastique linéaire,

tandis que l'âme vérifie une loi de comportement élastoplastique, basée sur le critère de Von Mises et un écrouissage isotrope linéaire.

Un code de calcul « maison » a été mis en œuvre, dans lequel différentes méthodes numériques ont été implantées, de façon à pouvoir résoudre l'ensemble des problèmes envisagés. La résolution des problèmes linéarisés (de vibration ou de flambement) nécessite l'utilisation d'une procédure de calcul de valeurs et vecteurs propres. Une démarche de calcul incrémentale est également disponible, dans le cas d'un calcul non-linéaire (mettant en jeu de la plasticité et/ou décrivant le post-flambement avancé en grandes transformations). Compte tenu du caractère critique des problèmes de flambement envisagés, une méthode de longueur d'arc est implantée pour le suivi de courbe (non monotone) ainsi qu'une méthode de branch-switching pour automatiser la bifurcation sans l'ajout de défauts initiaux dans le modèle.

## 4 Validation et résultats remarquables

### 4.1 Vibrations

Les modes de vibration de poutres sandwich sont sinusoïdaux dans la direction longitudinale et la fréquence propre augmente globalement avec le nombre d'ondes, quelque soit l'élancement de la poutre. Les premiers modes sont généralement antisymétriques mais des modes symétriques viennent rapidement s'intercaler entre eux. Ce qui est remarquable, c'est la présence, pour chacun des « modes symétriques de peaux » (lorsque les peaux se déforment en opposition de phase avec un nombre d'ondes donné), de deux modes de déformation de l'âme correspondant à deux fréquences propres bien différentes. La figure 1 montre l'existence de deux séries de modes symétriques et permet de vérifier, au passage, la parfaite corrélation entre les résultats analytiques, numériques 1D et numériques 2D, tandis que la figure 2 illustre deux de ces modes associés au même nombre d'ondes.

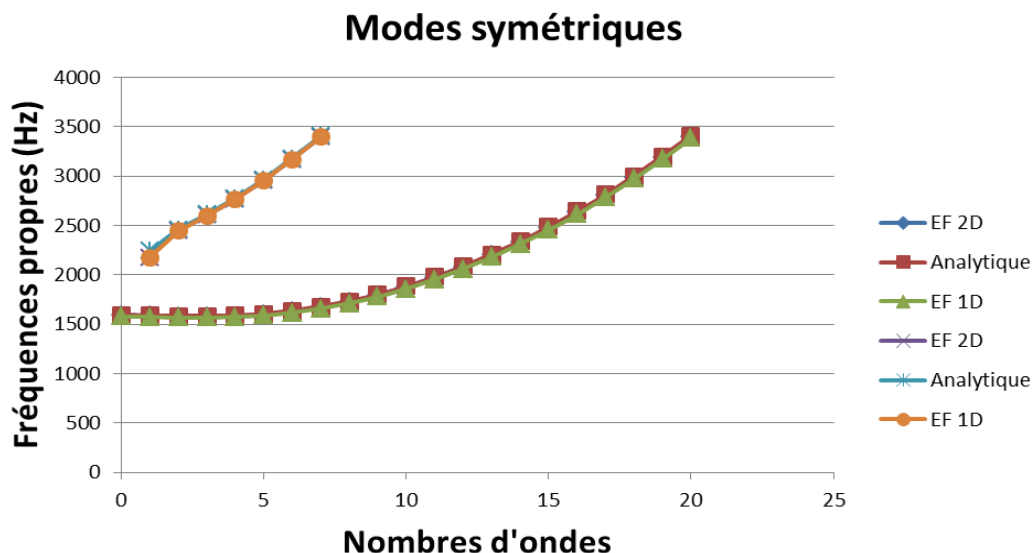


Figure 1 : Comparaison des fréquences propres de vibration analytiques et numériques pour les modes symétriques

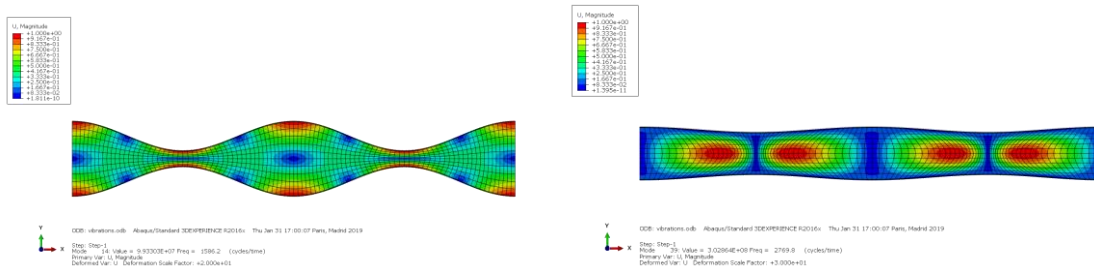


Figure 2 : Illustration de deux modes symétriques différents ayant le même nombre d'ondes

## 4.2 Flambement et post-flambement

Les résultats sont globalement similaires aux précédents. Cependant, à la différence des vibrations, dans le cas de poutres épaisses, les modes de flambement locaux précèdent les modes globaux en termes de chargement critique. En élasticité, les modes antisymétriques précèdent toujours les modes symétriques, alors qu'en plasticité, le contraire est possible (comme le montre la figure 3). L'utilisation de l'élément fini 1D permet de traiter de nouveaux problèmes (sans solution analytique) comme la flexion simple (voir figure 4).

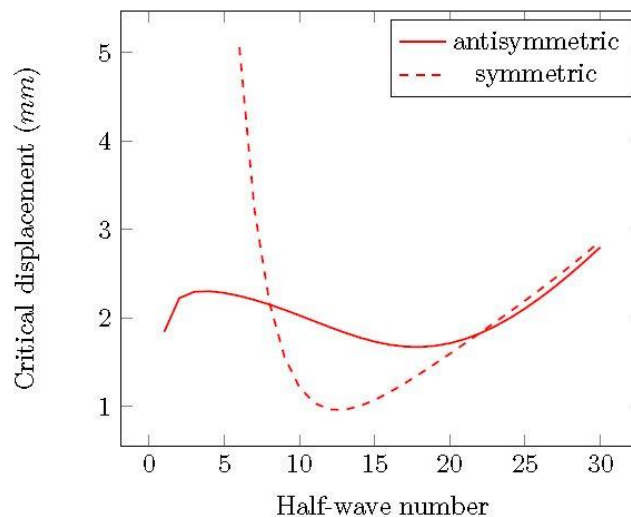


Figure 3 : Evolution des valeurs critiques des modes symétriques et antisymétriques en fonction du nombre d'ondes

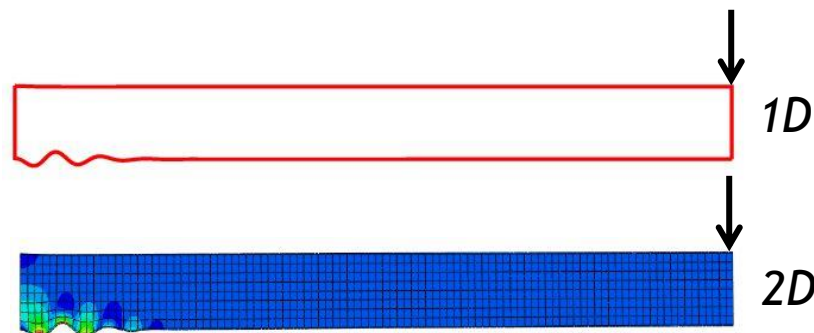


Figure 4 : Validation du mode de flambement en flexion simple

L'analyse incrémentale du post-flambement lointain montre généralement des réponses post-critiques instables (snap-through) et l'occurrence presque systématique d'un mode secondaire (global ou local, si le mode primaire est respectivement local ou global). La présence de ces deux types de modes successifs traduit le phénomène d'interaction modale (illustré à la figure 5), qui découle fatalement sur la ruine de la structure. En plasticité, l'instabilité est encore plus marquée (sous la forme d'un snap-back) et le flambement secondaire est « remplacé » par un phénomène de localisation (voir figure 6).

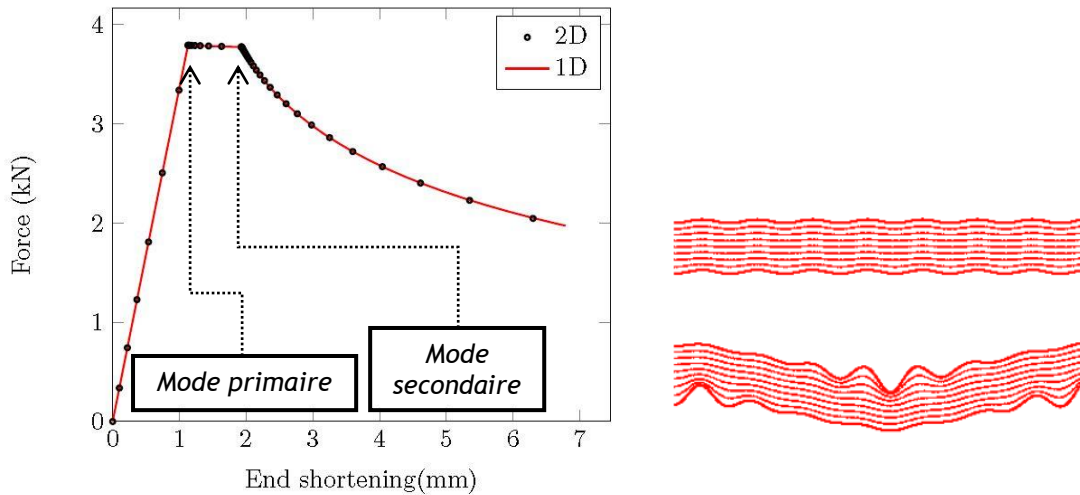


Figure 5 : Interaction modale lors du post-flambement élastique d'une poutre sandwich

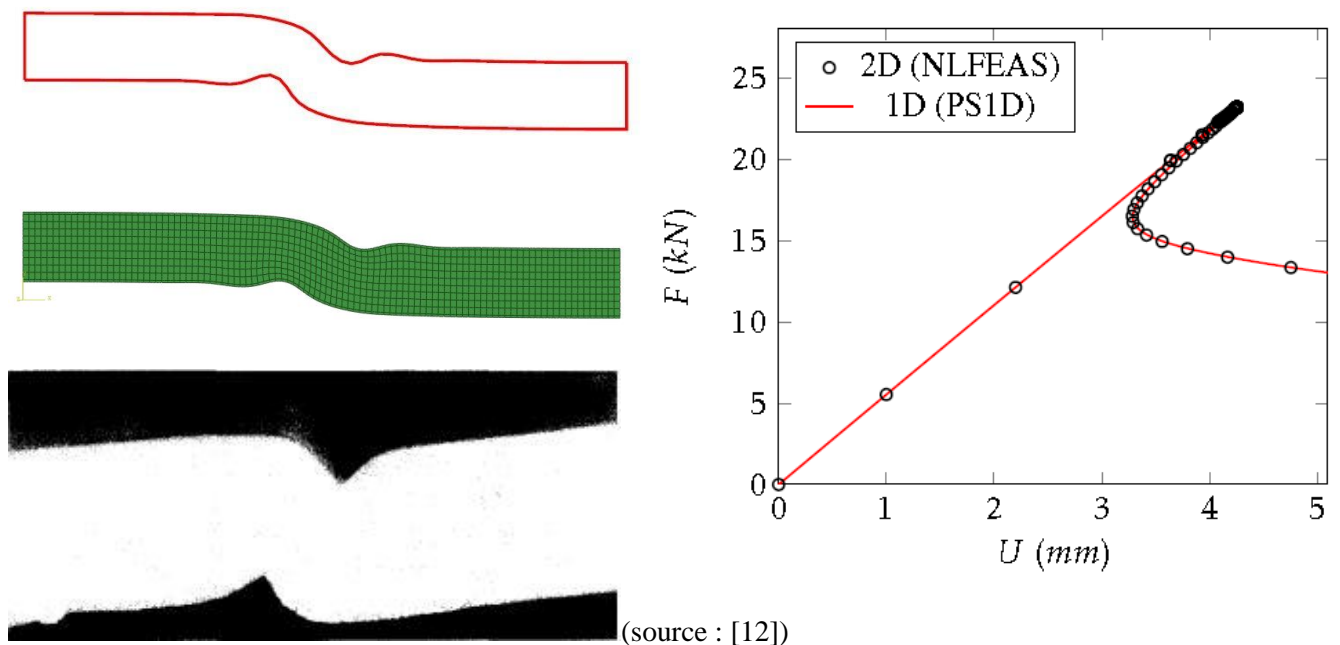


Figure 6 : Post-flambement d'une poutre sandwich élastoplastique

## 5 Influence des renforts

Si les structures sandwich disposent d'excellentes propriétés spécifiques dans le plan, leurs performances sont intrinsèquement bien moindres dans l'épaisseur. C'est pourquoi, en pratique, on vient très souvent remplacer l'âme homogène par une âme à parois minces, ou la renforcer par des renforts de type « poutre », le plus souvent disposés de manière orthogonale aux peaux et distribués de manière périodique. De premiers résultats ont été obtenus quant à la modélisation du flambement de poutres sandwich ainsi renforcées. La configuration la plus simple consiste à comprimer selon l'épaisseur le sandwich qui flambe alors de manière périodique (voir figure 7), de façon à ce que l'analyse d'une cellule unité (élément de sandwich comprenant un seul renfort) suffise à déterminer le chargement critique, moyennant des conditions aux limites périodiques.

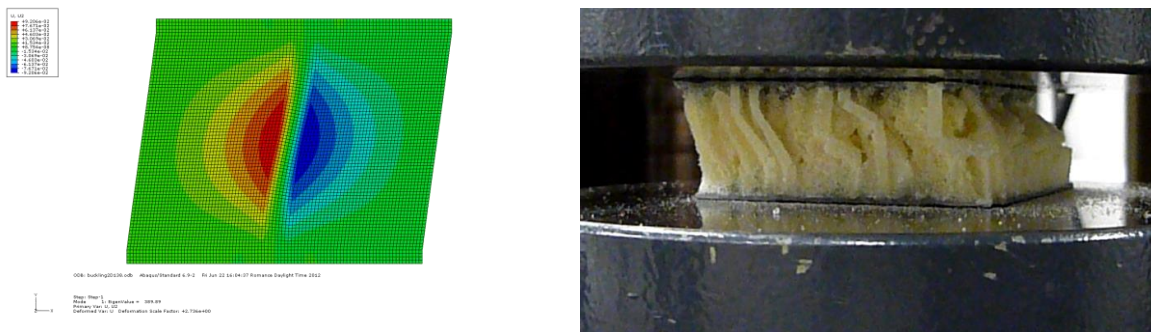


Figure 7 : Flambement d'un sandwich renforcé en compression dans l'épaisseur

En revanche, la compression axiale d'une poutre sandwich renforcée donne lieu à des modes le plus souvent périodiques, mais dont la période n'est pas calée sur la dimension de la cellule unité précédente. On fait appel alors à la théorie des ondes de Bloch pour pouvoir obtenir les modes de flambement successifs en s'appuyant toujours sur une simple cellule unité, à des fins d'efficacité (figure 8).

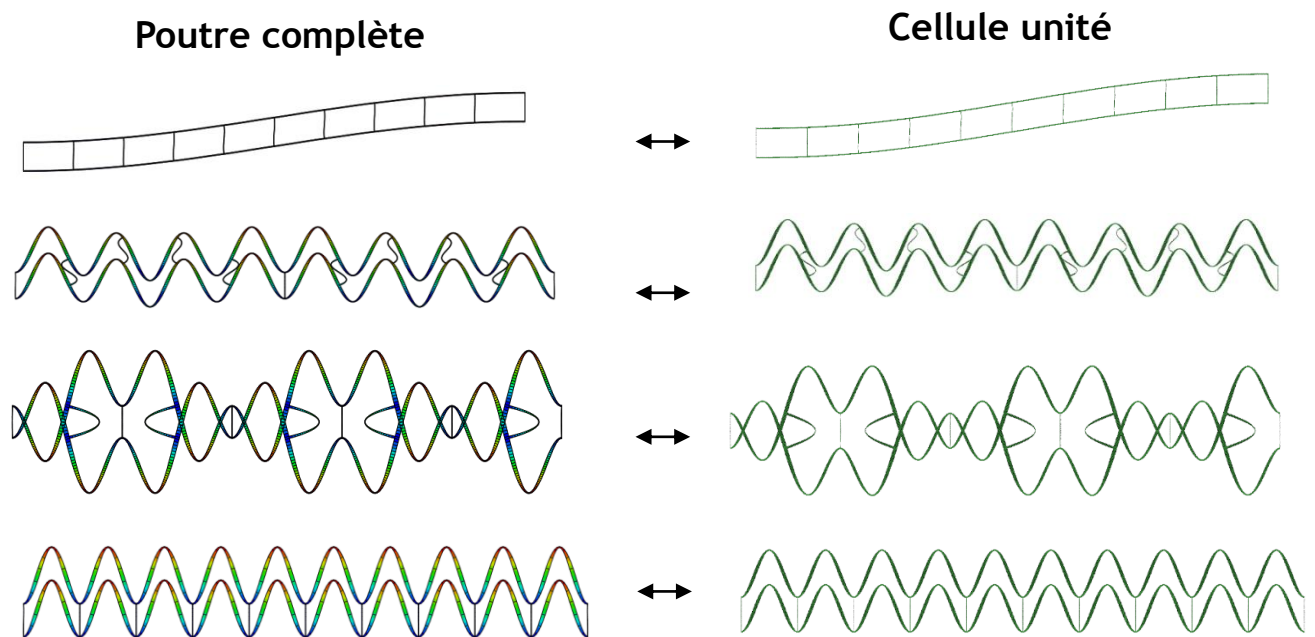


Figure 8 : Flambement d'une poutre sandwich renforcée sous compression axiale



## 6 Conclusion et perspectives

Les travaux à venir portent alors naturellement sur l'intégration de ces nouveaux modes de déformation, dus à la présence des renforts, dans le modèle élément fini développé jusqu'alors, qui implique pourquoi pas l'utilisation de la théorie des ondes de Bloch dans l'idée de se limiter à l'étude d'une simple cellule unité.

## Références

- [1] P. Jasion, E. Magnucka-Blandzi, W. Szyc, K. Magnucki. Global and local buckling of sandwich circular and beam-rectangular plates with metal foam core, *Thin-Walled Structures* **61** (2012) 154-161.
- [2] J.R. Banerjee, A.J. Sobey. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a three-layered sandwich beam, *International Journal of Solids and Structures* **42** (2005) 2181-2197.
- [3] L. Léotoing, S. Drapier, A. Vautrin. First applications of a novel unified model for global and local buckling of sandwich columns, *European Journal of Mechanics – A/Solids* **21** (2002) 683-701.
- [4] L. Léotoing, S. Drapier, A. Vautrin. Nonlinear interaction of geometrical and material properties in sandwich beam instabilities, *International Journal of Solids and Structures* **39** (2002) 3717-3739.
- [5] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, A. Makradi. A novel finite element for global and local buckling analysis of sandwich beams, *Composite Structures* **90** (2009) 270-278.
- [6] M.A. Douville, P. Le Grogneec. Exact analytical solutions for the local and global buckling of sandwich beam-columns under various loadings, *International Journal of Solids and Structures* **50** (2013) 2597-2609.
- [7] P. Le Grogneec, K. Sad Saoud. Elastoplastic buckling and post-buckling analysis of sandwich columns, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **72** (2015) 67-79.
- [8] K. Sad Saoud, P. Le Grogneec. An enriched 1D finite element for the buckling analysis of sandwich beam-columns, *Computational Mechanics* **57** (2016) 887-900.
- [9] K. Sad Saoud, P. Le Grogneec. Post-buckling analysis of elastoplastic sandwich columns by means of an enriched 1D finite element model, *International Journal of Solids and Structures* **129** (2017) 90-102.
- [10] C. Lainé, P. Le Grogneec, S. Comas-Cardona, C. Binetruy. Analytical, numerical and experimental study of the bifurcation and collapse behavior of a 3D reinforced sandwich structure under through-thickness compression, *International Journal of Mechanical Sciences* **67** (2013) 42-52.
- [11] V.D. Do, P. Le Grogneec. Buckling analysis of a reinforced sandwich column using the Bloch wave theory, *Thin-Walled Structures* **115** (2017) 323-335.
- [12] M.A. Stiftinger, F.G. Rammerstorfer. Face layer wrinkling in sandwich shells – theoretical and experimental investigations, *Thin-Walled Structures* **29** (1997) 113-127.