



HAL
open science

Opérateur d'inter-énergie Ψ_H et densité inter-spectrale

Abdel Boudraa, Thierry Chonavel, Jean-Christophe Cexus

► **To cite this version:**

Abdel Boudraa, Thierry Chonavel, Jean-Christophe Cexus. Opérateur d'inter-énergie Ψ_H et densité inter-spectrale. 24ème édition du colloque Grets, Sep 2013, Brest, France. 4 p. hal-00860130

HAL Id: hal-00860130

<https://ensta-bretagne.hal.science/hal-00860130>

Submitted on 10 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Opérateur d'inter-énergie $\Psi_{\mathbb{H}}$ et densité inter-spectrale

Abdel-Ouahab BOUDRAA*, THIERRY CHONAVEL⁺ ET JEAN-CHRISTOPHE CEXUS[†]

*IRENav (EA 3634), Ecole Navale/Arts et Métiers ParisTech, BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest.

⁺LabSTICC, Télécom Bretagne, Technopole Brest-Iroise, BP 832, 29285, Brest.

[†]LabSTICC, ENSTA Bretagne, 2 rue François Verny, 29806 Brest.

(boudra@ecole-navale.fr, thierry.chonavel@telecom-bretagne.eu,
Jean-Christophe.Cexus@ensta-bretagne.fr)

Résumé – Dans cet article, nous présentons la version Hermitienne, notée $\Psi_{\mathbb{H}}$, de l'opérateur d'inter-énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ [1] où les termes croisés sont issus de la représentation vectorielle des signaux. Nous nous intéressons au lien entre l'opérateur bilinéaire $\Psi_{\mathbb{H}}$ et la densité inter-spectrale de deux signaux complexes. Le lien établi permet d'utiliser l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$ pour estimer la fonction de cohérence entre deux signaux. Les résultats obtenus sur des données simulées et réelles montrent l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ comme mesure de similarité entre deux signaux dans le domaine fréquentiel.

Abstract – In this paper the Hermitian version of the cross- $\Psi_{\mathbb{B}}$ energy operator [1], denoted by $\Psi_{\mathbb{H}}$, is introduced. Its cross-energy terms are formalized through multivariate signals representation. The relationship between the bilinear operator $\Psi_{\mathbb{H}}$ and the cross-power spectral density of two complex-valued signals is investigated. This relationship permits to use the operator $\Psi_{\mathbb{H}}$ to estimate the coherence function between two signals. The effectiveness of $\Psi_{\mathbb{H}}$ is illustrated both on synthetic and real data. Results show the interest of $\Psi_{\mathbb{H}}$ as a similarity measure between two complex-valued signals in the frequency domain.

1 Introduction

L'opérateur d'inter-énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ est une extension de l'opérateur non-linéaire d'énergie de Teager-Kaiser [2], utilisé en démodulation des signaux AM-FM [3], aux signaux complexes [1]. Cet opérateur permet d'estimer l'interaction en énergie entre deux signaux complexes. Nous avons récemment montré l'intérêt de cet opérateur pour l'analyse des signaux non-stationnaires. On peut citer comme applications de $\Psi_{\mathbb{B}}$, l'analyse des séries temporelles [4], la classification de profils d'expression de gènes [5], l'équation des ondes [6], le calcul de temps de retard [7], l'analyse temps-fréquence [8] ou la segmentation d'images [9]. Ces applications montrent l'intérêt de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ pour le traitement des signaux et des images. Dans cet article nous introduisons la version Hermitienne de $\Psi_{\mathbb{B}}$, notée $\Psi_{\mathbb{H}}$ qui possède une expression plus compacte. De plus, nous établissons le lien entre $\Psi_{\mathbb{H}}$ et la densité inter-spectrale et montrons comment $\Psi_{\mathbb{H}}$ peut être utilisé pour mesurer la cohérence entre deux signaux à une fréquence donnée.

2 Densité inter-spectrale et opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{H}}$

Soient x_t et y_t deux signaux à valeurs complexes. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ est défini comme suit [1] :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x_t, y_t] = \frac{1}{2}[\dot{x}_t^* \dot{y}_t + \dot{x}_t \dot{y}_t^*] - \frac{1}{4}[x_t \ddot{y}_t^* + x_t^* \ddot{y}_t + y_t \ddot{x}_t^* + y_t^* \ddot{x}_t] \quad (1)$$

où \cdot^* est l'opération conjugaison. On montre que l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ est lié à la fonction d'intercorrélation instantanée $R_{xy}(t, \tau)$ par la relation suivante [1] :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x_t, y_t] = - \frac{\partial^2 R_{xy}(t, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 R_{xy}^*(t, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} \quad (2)$$

où $R_{xy}(t, \tau)$ est donnée par

$$R_{xy}(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot y^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad (3)$$

De façon analogue à $\Psi_{\mathbb{B}}$, nous définissons l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$ par l'équation suivante :

$$\Psi_{\mathbb{H}}[x_t, y_t] = \dot{x}_t \dot{y}_t^* - \frac{1}{2}[x_t \ddot{y}_t^* + \ddot{x}_t y_t^*]. \quad (4)$$

Si \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 désignent deux processus vectoriels, l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$ s'écrit

$$\Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_{1t}, \mathbf{z}_{2t}] = \dot{\mathbf{z}}_{1t} \dot{\mathbf{z}}_{2t}^H - \frac{1}{2}[\mathbf{z}_{1t} \ddot{\mathbf{z}}_{2t}^H + \ddot{\mathbf{z}}_{1t} \mathbf{z}_{2t}^H] \quad (5)$$

où \cdot^H est la conjugaison Hermitienne. Pour $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$, avec $\mathbf{z} = [x, y]^T$, nous obtenons la représentation matricielle suivante

$$\Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_t] = \begin{bmatrix} \Psi_{\mathbb{H}}[x_t, x_t] & \Psi_{\mathbb{H}}[x_t, y_t] \\ \Psi_{\mathbb{H}}[y_t, x_t] & \Psi_{\mathbb{H}}[y_t, y_t] \end{bmatrix} \quad (6)$$

Les termes croisés de $\Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_t]$ mesurent le couplage entre x_t et y_t . L'énergie moyenne d'interaction entre deux signaux

à énergie finie mesurée par $\Psi_{\mathbb{H}}$ a été introduite dans [7]. De même, nous définissons l'énergie moyenne de $\Psi_{\mathbb{H}}$ par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_{1t}, \mathbf{z}_{2(t-\tau)}] dt. \quad (7)$$

Si $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$ l'énergie d'interaction entre x et y est donnée par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi_{\mathbb{H}}[x_t, y_{t-\tau}] dt. \quad (8)$$

Plus exactement, $\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)$ mesure le couplage moyen entre x_t et $y_{t-\tau}$.

Pour deux processus vectorielles \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 , l'intercorrélacion est donnée par

$$R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{z}_{1t} \mathbf{z}_{2(t-\tau)}^H dt. \quad (9)$$

Pour $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = [x, y]^T$ nous avons, $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$.

Dans ce qui suit, nous établissons le lien entre $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}$ et la fonction de corrélation.

Proposition 1

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) = 2R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) \quad (10)$$

En particulier, pour deux signaux scalaires x et y nous obtenons $\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau) = 2R_{\dot{x}\dot{y}}(\tau)$.

Preuve :

En utilisant la propriété

$$\frac{\partial^{l+m}}{\partial \tau^{l+m}} R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau) = (-1)^{(m)} R_{\mathbf{z}_1^{(l)} \mathbf{z}_2^{(m)}}(\tau) \quad (11)$$

où l et m sont deux entiers naturels, il facile de montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{\mathbf{z}}_{1t} \dot{\mathbf{z}}_{2(t-\tau)}^H - \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{z}}_{1t} \mathbf{z}_{2(t-\tau)}^H \\ &+ \mathbf{z}_{1t} \dot{\mathbf{z}}_{2(t-\tau)}^H] dt. \\ &= R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) - \frac{1}{2} [R_{\mathbf{z}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) - R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \mathbf{z}_2}(\tau)] \\ &= 2R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

La densité inter-spectrale de \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 est la transformée de Fourier de $R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau)$: $S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f) = \mathcal{F}[R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau)]$. Pour $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$, nous avons

$$S_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(f) = \begin{bmatrix} S_{xx}(f) & S_{xy}(f) \\ S_{yx}(f) & S_{yy}(f) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Comme $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$, il en résulte que $S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f)$. De la proposition 1, on déduit le résultat suivant :

Proposition 2

$$\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau)] = 2S_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(f) \quad (14)$$

En particulier, pour deux signaux scalaires x et y nous avons $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)] = 2S_{\dot{x}\dot{y}}(f)$.

Si \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 sont des processus vectoriels à valeurs complexes dans \mathbb{C}^n , comme la dérivation se ramène à un filtrage de réponse fréquentielle $\hat{h}(f) = 2i\pi f$, on a

$$\mathcal{F} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}(f)\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \hat{h}(f)\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \times \mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

où \mathbf{I}_n et $\mathbf{0}_n$ sont les matrices identité et nulle de taille n . Des équations (14) et (15), on peut écrire

$$S_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(f) = |\hat{h}(f)|^2 S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau)] \quad (16)$$

En appliquant la transformée Fourier à l'équation ci-dessus il vient d'après la proposition 14 que :

Proposition 3

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) = 8\pi^2 \int_{\mathbb{R}} f^2 S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f) e^{2j\pi f\tau} df. \quad (17)$$

Pour deux signaux scalaires x et y , l'expression de $\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)$ en fonction de l'inter-spectre de x et y est donnée par :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau) = 8\pi^2 \int_{\mathbb{R}} f^2 S_{xy}(f) e^{2j\pi f\tau} df. \quad (18)$$

Au facteur $8\pi^2$ près, $\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau)$ est le moment d'ordre deux de $S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f)$. Cette relation peut encore se réécrire

$$S_{xy}(f) = (8\pi^2 f^2)^{-1} \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)] \quad (19)$$

Soient x et y deux signaux stationnaires de moyenne nulle. La fonction de coherence est définie par :

$$\gamma_{xy}^S(f) = \frac{|S_{xy}(f)|}{\sqrt{S_{xx}(f)} \cdot \sqrt{S_{yy}(f)}}. \quad (20)$$

Les relations (19) et (20) permettent d'écrire la fonction de coherence en utilisant l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$

$$\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f) = \frac{|\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)|}{\sqrt{\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xx}](f)} \times \sqrt{\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}yy}](f)}}. \quad (21)$$

Comme $(\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f))^2 \leq 1$, il est facile de voir que

$$|\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)|^2 \leq \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xx}](f) \cdot \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}yy}](f) \quad (22)$$

Pour $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f) = 0$, les signaux x et y sont non corrélés à cette fréquence, tandis que la relation $|\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)| = 1$ indique une totale corrélation de x et y ;

3 Résultats

Nous montrons d'abord l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ pour mesurer l'interaction entre un signal synthétique x_t et sa version filtrée et bruitée (Fig. 1). Soit x_t un signal AM-FM décrit comme suit :

$$\begin{aligned} x_t &= a_t e^{j\phi(t)} \\ a_t &= 1 + \kappa \cos(\omega_a t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \omega_c t + \omega_m \int_0^t q_\tau d\tau \\ q_t &= \sin(\omega_q t)\end{aligned}\quad (23)$$

où a_t est l'amplitude instantanée, ω_c est la fréquence de la porteuse, κ est l'indice de la modulation AM, q_t est la fréquence du signal modulant et ω_m est la fréquence maximale. Pour les simulations nous utilisons les paramètres suivants : $\omega_q = 0.63, \omega_a = 0.63, \omega_c = 1.57, \omega_m = 0.94, \kappa = 0.7$. Soit y_t le signal résultant du filtrage de x_t par un filtre de réponse impulsionnelle g_t et entaché d'un bruit blanc Gaussien complexe, n_t

$$y_t = (g * x)_t + n_t \quad (24)$$

La fonction de transfert du filtre est donnée par

$$G(z) = 1 + \sum_{k=1}^{L-1} g_k z^{-k} \quad (25)$$

avec $g_k \sim 0.1 \times \mathcal{N}(0, 1)$ et $L = 10$. Le rapport signal à bruit est de 0dB.

Pour détecter la présence de x_t dans y_t , nous utilisons la fonction de cohérence basée sur la densité inter-spectrale classique (Eq. 20) ainsi que celle de $\Psi_{\mathbb{H}}$ (Eq. 21). Nous présentons sur les figures 1(a) et 1(b) les spectres de x_t et y_t . Les figures 1(c) et 1(d) représentent les résultats du calcul de $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ obtenus par moyennage sur 1 et 15 réalisations respectivement. Ces résultats montrent que malgré un très faible rapport signal à bruit (0dB), $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ identifie correctement les fréquences communes à x_t et y_t . Ces fréquences sont d'autant mieux localisées que le nombre de réalisations est élevé. Comparé au spectre de y_t moyenné sur 15 réalisations (Fig. 1(b)) et celui de $\gamma_{xy}^{\mathbb{S}}(f)$ (Fig. 1(e)), nous observons que les pics en fréquence sont mieux identifiés avec $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ et avec une meilleure résolution (Fig. 1(d)). Pour le calcul de la cohérence $\gamma_{xy}^{\mathbb{S}}(f)$ (Eq. 20) nous avons utilisé la fonction `mscohere.m` de MatLab avec le même nombre de points de la FFT que celui de $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ (Eq. 21) et en utilisant une fenêtre rectangulaire. Notons que malgré la meilleure résolution de $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$, les pics détectés sont moins élevés que ceux obtenus par la cohérence classique.

Nous illustrons aussi l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ sur des signaux réels. Des données aérodynamiques sont enregistrés au niveau du mât d'un voilier instrumenté pour les mesures en mer des sollicitations dynamiques sur les voiles (vent, houle, ...) [10]. Le signal correspondant au vent apparent, noté x_t , induit par le tangage du voilier est mesuré par un anémomètre acoustique. L'attitude en tangage du voilier, noté y_t , est mesurée par une centrale inertielle placée au niveau de la coque. Les signaux x_t et y_t de durée 20 secondes sont enregistrés en présence de deux houles par l'avant et de fréquences différentes $f_1 = 0.73\text{Hz}$ et $f_2 = 0.85\text{Hz}$. Ainsi, les variations de x_t et y_t sont liées en partie aux fréquences des ces deux houles. Les deux processus sont supposés ergodiques. Les spectres d'amplitudes correspondants, $|X(f)|$ et $|Y(f)|$, sont représentés sur la figure 1. Les deux fréquences de houle, présentes dans x_t et y_t , sont bien identifiées

par $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)$ comme deux fréquences communes. Comme l'indique la figure 2, $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)$ présente deux pics bien localisés en $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)$ montrant ainsi la parfaite interaction ou corrélation en f_1 et f_2 (Eq. 22) des signaux x_t et y_t . Ce résultat confirme l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ pour la mesure de similarité entre deux signaux dans le domaine fréquentiel.

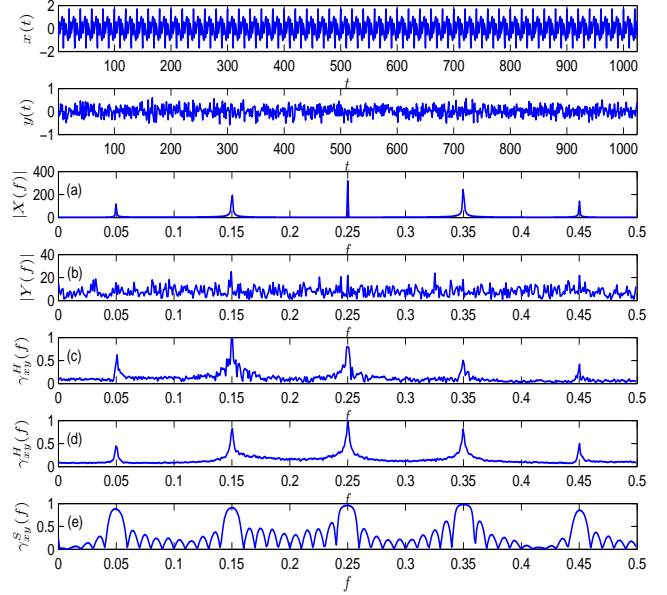


FIGURE 1 – Analyse de signaux AM-FM.

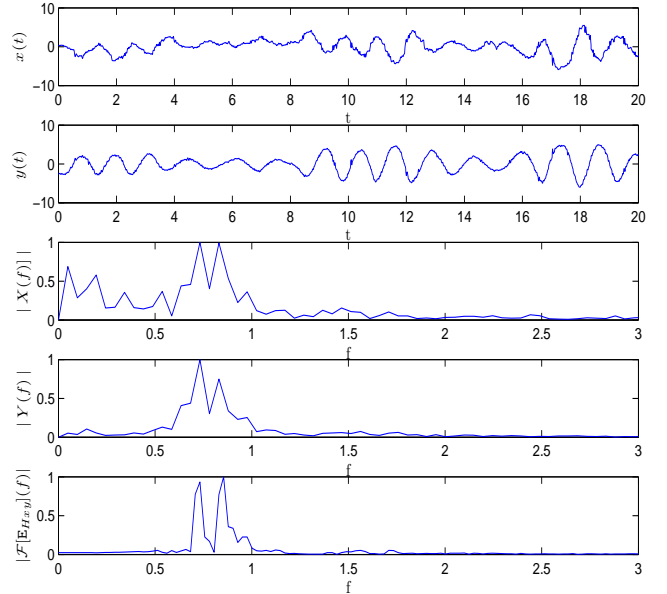


FIGURE 2 – Analyse de signaux aérodynamiques.

4 Conclusions

Dans cet article, on a introduit la version Hermitienne de l'opérateur Ψ_B , notée Ψ_H . Cette extension a permis d'établir le lien avec la densité inter-spectrale de deux signaux complexes, permettant ainsi son estimation via l'opérateur Ψ_H . L'équivalent de la fonction de cohérence basé sur l'emploi de Ψ_H a également été introduit. Les résultats préliminaires, sur des données réelles d'aérodynamisme, montrent l'intérêt de l'opérateur comme mesure de similarité pour l'identification de fréquences communes à deux signaux complexes.

Références

- [1] J.C. Cexus and A.O. Boudraa, "Link between cross-Wigner distribution and cross-Teager energy operator," *Elec. Lett.*, vol. 40, no. 12, pp. 778-780, 2004.
- [2] J.F. Kaiser, "Some useful properties of Teager's energy operators," *Proc. ICASSP*, vol. 3, pp. 149-152, 1993.
- [3] P. Maragos, J. F. Kaiser and T. F. Quatieri, "Energy separation in signal modulations with application to speech analysis," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol.41, no.10, pp.3024-3051 1993.
- [4] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, M. Groussat and P. Brunagel, "An energy-based similarity measure for time series," *Adv. in Sig. Proc.*, ID 135892, 8 pages, 2008.
- [5] W.F. Zhang, C.C. Liu and H. Yan, "Clustering of temporal gene expression data by regularized spline regression an energy based similarity measure," *Patt. Recong.*, vol. 43, pp. 3969-3976, 2010.
- [6] J.P. Montillet, "On a novel approach to decompose finite energy functions by energy operators and its application to the general wave equation," *International Mathematical Forum*, vol. 48, pp. 2387-2400, 2010.
- [7] A.O. Boudraa, J.C. Cexus and K. Abed-Meraim, "Cross- Ψ_B -energy operator-based signal detection," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, no. 6, pp. 4283-4289, 2008.
- [8] A.O. Boudraa, "Relationships between Ψ_B -energy operator and some time-frequency representations," *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 17, no. 6, pp. 527-530, 2010.
- [9] J.C. Cexus, A.O. Boudraa, A. Baussard, F.H. Ardeyeh and E.H.S. Diop, "2D cross- Ψ_B -energy operator for images analysis," *Proc. IEEE ISCCSP*, 5 pages, 2010, Limassol, Cyprus.
- [10] B. Augier, P. Bot, F. Hauville and M. Durand, "Experimental validation of unsteady models for fluid structure interaction : Application to yacht sails and rigs", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 101, pp 53-66, 2012.